Klausur VWL, Frühjahr 1997

1. Aufgabe

Eine Modellwirtschaft lasse sich wie folgt beschreiben:

$$U_i = U(x_i, F_i) \qquad \text{i = 1,...,n}$$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} A_i + \sum_{i=1}^{n} F_i$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$X = X(A_x)$$

$$A_x = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

Dabei bezeichnen

x_i die Verbrauchsmenge des Gutes X durch den i-ten Konsumenten,

F_i die Freizeit dieses Konsumenten,

A_i sein Arbeitsangebot,

T_i die Zeit, über die er insgesamt verfügen kann,

X die produzierte Menge des Gutes X und

A_x die bei der Produktion des Gutes X eingesetzte Arbeitsmenge.

a) Was versteht man unter einem Pareto-Optimum?

b) Leiten Sie für die beschriebene Modellwirtschaft die folgenden Bedingungen für Pareto-Optimalität her und interpretieren Sie sie:

(A) $$\frac{\frac{\partial U_1}{\partial x_1}}{\frac{\partial U_1}{\partial F_1}} = -\frac{dF_1}{dx_1} = \cdots = -\frac{dF_n}{dx_n} = \frac{\frac{\partial U_n}{\partial x_n}}{\frac{\partial U_n}{\partial F_n}}$$

(B) $$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial A_x} = \frac{\partial U_i}{\partial F_i} \qquad \text{i=1,...,n}$$

c) Zeigen Sie, daß diese Bedingungen erfüllt sind, wenn die Modellökonomie konkurrenzmäßig organisiert ist.

d) Gilt Ihr Ergebnis zu c) auch dann noch, wenn der Staat eine proportionale Einkommensteuer einführt, deren Aufkommen er zum Kauf einer entsprechenden Menge des Gutes X verwendet? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Musterlösung

a)

Ein möglicher Zustand A ist Pareto-optimal, wenn es keinen anderen möglichen Zustand gibt, in dem wenigstens ein Wirtschaftssubjekt besser und kein Wirtschaftssubjekt schlechter gestellt ist als in A.

b)

In der Aufgabe war die Beschränkung

$$\sum_i T_i = \sum_i A_i + \sum_i F_i$$

angegeben. Da Zeit zwischen Personen nicht übertragbar ist, wäre es sinnvoller gewesen, von den individuellen Beschränkungen

$$T_i = A_i + F_i \quad , \qquad i = 1, \ldots, n$$

auszugehen. Auf diesen und nicht auf den in der Aufgabe beschriebenen Fall stellt die Musterlösung ab. Für die herzuleitenden Bedingungen spielt es keine Rolle, welche Beschränkung verwendet wird.

Wir maximieren die Lagrange-Funktion

$$L = U(x_i, F_i) + \sum_{j \neq i} \lambda_j \left[U\,(x_j, F_j) - \overline{U}_j \right]$$

$$+ \mu_x\,(X - \sum_i x_i) + \mu_a\,(\sum_i A_i - A_x)$$

$$+ \sum_i \mu_{Ti}\,(T_i - A_i - F_i) + \theta\left[X(A_x) - X \right]$$

Als notwendige Bedingungen erster Ordnung für ein inneres Maximum erhält man

(1) $\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - \mu_x = 0 \qquad , \qquad i \neq j$

(2) $\frac{\partial L}{\partial F_i} = \frac{\partial U}{\partial F_i} - \mu_{Ti} = 0 \qquad , \qquad i \neq j$

(3) $\frac{\partial L}{\partial x_j} = \lambda_j \frac{\partial U}{\partial x_j} - \mu_x = 0 \qquad , \qquad j \neq i$

(4) $\frac{\partial L}{\partial F_j} = \lambda_j \frac{\partial U}{\partial F_j} - \mu_{Tj} = 0 \qquad , \qquad j \neq i$

(5) $\frac{\partial L}{\partial X} = \mu_x - \theta = 0$

(6) $\frac{\partial L}{\partial A_x} = -\mu_a + \theta \frac{dX}{dA_x} = 0$

(7) $\frac{\partial L}{\partial A_i} = \mu_a - \mu_{Ti} = 0 \qquad$ für alle i

Aus (1) - (4) und (7) folgt

$$-\frac{dF_i}{dx_i} = \frac{\partial U / \partial x_i}{\partial U / \partial F_i} = \frac{\mu_x}{\mu_a} = \frac{\partial U / \partial x_j}{\partial U / \partial F_j} = -\frac{dF_j}{dx_j}$$

Im Pareto-Optimum müssen die Grenzraten der Substitution zwischen Freizeit und Güterverbrauch für alle Individuen gleich sein.

Aus (5) und (6) folgt:

$$\mu_x \frac{dX}{dA_x} = \mu_a$$

Zusammen mit (1) - (4) und (7) folgt weiter

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{dX}{dA_x} = \frac{\partial U}{\partial F_i} \qquad \text{für alle i}$$

Interpretation: Die linke Seite ist das Produkt aus dem Grenznutzen des Güterverbrauchs und der Grenzproduktivität der Arbeit. Es mißt den Nutzenzuwachs eines Individuums, der ihm aus einer zusätzlichen Einheit an Arbeitszeit entsteht. Auf der rechten Seite steht der Grenznutzen der Freizeit. Im

Pareto-Optimum muß also eine Zeiteinheit bei jedem Individuum in den beiden möglichen Verwendungen den gleichen Nutzenzuwachs erbringen.

c)

Ein Individuum *i*, das sich einem gegebenen Güterpreis p_x und einem gegebenem Lohnsatz p_a gegenübersieht, löst folgendes Problem

$$\max_{x_i, F_i} \quad U(x_i, F_i)$$

$$\text{u.d.N.} \quad p_a\ (T_i - F_i) - p_x\ x_i = 0$$

Wir maximieren die zugehörige Lagrange-Funktion

$$Z = U(x_i, F_i) + \delta_i\ [p_a\ (T_i - F_i) - p_x\ x_i]$$

bezüglich x_i und F_i. Als Bedingung erster Ordnung erhalten wir

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} - \delta_i\ p_x = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} - \delta_i\ p_a = 0\ .$$

Da sich bei Wettbewerb alle Individuen dem gleichen Preisverhältnis konfrontiert sehen, folgt

$$-\frac{dF_i}{dx_i} = \frac{\partial U / \partial x_i}{\partial U / \partial F_i} = \frac{p_x}{p_a} \qquad \text{für alle i}$$

Die Unternehmen maximieren ihren Gewinn.

Dies impliziert

$$\frac{dX}{dA_x} = \frac{p_a}{p_x}$$

Aus dieser und der vorherigen Gleichung folgt

$$\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{dX}{dA_x} = \frac{\partial U}{\partial F_i} \qquad \text{für alle i}$$

Damit ist gezeigt, daß bei vollkommenen Wettbewerb die notwendigen Bedingungen für ein Pareto-Optimum erfüllt sind.

d)

Bei einer proportionalen Einkommensteuer mit dem Steuersatz t beträgt die von einem Individuum zu zahlende Steuer $t\, p_a (T_i - F_i)$. Sein Nettoeinkommen beträgt $(1-t) p_a (T_i - F_i)$. Er löst nun folgendes Maximierungsproblem

$$\max_{x_i, F_i} \quad U\,(x_i, F_i)$$

u.d.N. $\quad (1-t)\; p_a\; (T_i - F_i) = p_x\, x_i$

Analog zu obigem Vorgehen erhalten wir als notwendige Bedingungen für ein Nutzenmaximum

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \delta_i\; p_x$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = \delta_i\; (1-t)\, p_a$$

und somit

$$-\frac{dF_i}{dx_i} = \frac{\partial U / \partial x_i}{\partial U / \partial F_i} = \frac{p_x}{p_a (1-t)} \qquad \text{für alle i}$$

Die Produktionsentscheidung der Unternehmen bleibt von der Steuer unberührt. Es gilt weiterhin $dX / dA_x = p_a \;/\; p_x$. Kombiniert man dies mit der Bedingung für ein Nutzenmaximum der Individuen, so folgt

$$(1-t)\,\frac{\partial U}{\partial x_i}\,\frac{dX}{dA_x} = \frac{\partial U}{\partial F_i}$$

Wir stellen fest, daß in einem Konkurrenzgleichgewicht der Nutzenzuwachs aus einer zusätzlichen Arbeitseinheit, $(\partial U / \partial x_i)\,(dX / dA_x)$ größer ist als der Grenznutzen der Freizeit. Die Zeitaufteilung ist nicht Pareto-optimal, denn die oben abgeleitete notwendige Bedingung für Pareto-Optimalität ist verletzt.

2. Aufgabe

Gegeben sei das folgende Modell einer kleinen offenen Wirtschaft mit flexiblem Wechselkurs:

$$Y = C\left[(1-t)Y\right] + I(i) + A + T(Y,w)$$

$$M = L\left[(1-t)Y, i\right]$$

$$i = i^* + \Pi$$

$$D = tY - A$$

$$K = T(Y,w)$$

a) Welche Funktionen sind zu der Funktion *T(Y,w)* zusammengefaßt worden?

b) Der Staat erhöht die Staatsausgaben, ändert den Steuersatz so, daß sich das Defizit nicht ändert, und die Zentralbank hält die Geldmenge konstant. Berechnen Sie die Änderung des Sozialprodukts.

c) Interpretieren Sie die Veränderung des Sozialprodukts ausführlich. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Änderung von *T(Y,w)* ein.

Musterlösung

a)

In der Funktion $T(Y,w)$ sind folgende Funktionen zusammengefaßt: (5 Punkte)

$$T(Y,w) = Ex(w) - \frac{w \cdot p_a}{p}\, Im(Y,w)$$

Es handelt sich also um den Außenbeitrag, gerechnet in inländischen Gütereinheiten. Es gilt $T_y < 0$ und $T_w > 0$, sobald die Marshall-Lerner-Bedingung gilt.

b)

Das Gleichungssystem ist teilweise rekursiv. (15 Punkte)

Aus $i = i^* + \Pi$ folgt $di = 0$. Damit können dY und dt aus den Gleichungen

$$0 = L_y(1-t)\,dY - L_y\,Y\,dt \qquad \text{und}$$

$$0 = t\,d\,Y + Y\,d\,t - d\,A$$

bestimmt werden. Dabei ist $L_y = \dfrac{\partial L\left[(1-t)Y, i\right]}{\partial\left[(1-t)Y\right]}$.

Es ergibt sich für *dt* aus der zweiten Gleichung

$$dt = \frac{dA - t\,dY}{Y}$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt

$$L_y\,(1-t)\,dY = \frac{L_y\;Y\,dA}{Y} - \frac{L_y Y\,t\,dY}{Y}$$

$$(1-t)\,dY = dA - t\,dY$$

$$dY = dA$$

c)

Das Sozialprodukt steigt um denselben Betrag wie die Staatsausgaben. (2 Punkte)
In der Wirtschaft passiert folgendes. Der Staat erhöht die Staatsausgaben. Daraufhin steigt in der ersten Runde auch *Y* um *dA*. Das verfügbare Einkommen ändert sich nicht: Aus der Geldmarktgleichung folgt bei $di = 0$, daß sich die Transaktionskasse nicht ändern darf, damit der Geldmarkt im Gleichgewicht bleibt. (6 Punkte) Die Transaktionskasse hängt hier vom verfügbaren Einkommen ab, das sich somit auch nicht ändern darf. Somit ändert sich auch der Konsum nicht.

Das steigende Sozialprodukt führt zu steigenden Importen, *T* sinkt. Um die Importe bezahlen zu können, müssen mehr Devisen nachgefragt werden. Eine steigende Devisennachfrage führt dazu, daß die heimische Währung abgewertet wird (*w* steigt). (5 Punkte) Eine genauere Betrachtung der Gütermarktgleichung unter Beachtung von $dC = 0$ und $di = 0$ (und damit $dI = 0$) zeigt, daß sich auch T nicht ändern darf:

$$dY = dC + dI + dA + dT$$

Es kann nur dann $dY = dA$ gelten, wenn auch $dT = 0$ ist.

Für die Abwertung ergibt sich

$$T_y\,dY + T_w\,dw = 0$$

$$\Rightarrow \qquad dw = -\frac{T_y}{T_w}\,dA > 0 \quad .$$

3. Aufgabe

Eine Volkswirtschaft werde durch das folgende Gleichungssystem beschrieben:

(1) $Y = c_G (1-t) G + c_L (1-t) L + I + A$

(2) $Y = G + L$

(3) $t Y = A$

(4) $Y = \overline{Y}$

Dabei bezeichnen

Y	:	reales Volkseinkommen
G	:	reales Gewinneinkommen
L	:	reales Lohneinkommen
I	:	private Realinvestitionen
A	:	reale Staatsausgaben
c_G, c_L	:	Konsumquoten der Bezieher von Gewinneinkommen bzw. Lohneinkommen
t	:	Steuersatz
$\overline{Y}$	:	fest vorgegebenes Realeinkommen bei Vollbeschäftigung

a) Was beschreiben die erste und die dritte Gleichung?

b) Welche Annahmen macht Kaldor über c_G, c_L und I ?

c) Leiten Sie aus dem Gleichungssystem die Kaldor-Formel für die Lohnquote her

(Sie können $(1-t)(1-c_G) > \frac{I}{Y}$ annehmen).

d) Welchen Einfluß hat eine steuerfinanzierte Erhöhung der Staatsausgaben auf die Lohnquote?

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. Beachten Sie dabei, daß nach Kaldor der Nominallohn (kurzfristig) nicht vollständig an die Entwicklung des Preisniveaus angepaßt wird.

e) Wie wirkt eine Erhöhung der Investitionen I auf die Lohnquote?

f) Vergleichen Sie die unter c) und d) erhaltenen Ergebnisse. Welche der beiden Größen I oder A hat einen stärkeren Einfluß auf die Lohnquote und warum?

Musterlösung

a)

Die erste Gleichung beschreibt das Gleichgewicht auf dem Gütermarkt (links: Güterangebot, rechts: Güternachfrage).

Die dritte Gleichung ist die Budgetbedingung der Regierung. Die Staatsausgaben werden genau steuerfinanziert, es besteht kein Defizit.

Kaldor betrachtet die Investitionen als exogen gegeben $(I = \bar{I})$. Sie werden durch technischen Fortschritt und langfristige Wachstumserwartungen bestimmt.

Die Konsumquote der Bezieher von Lohneinkommen ist höher als die der Bezieher von Gewinneinkommen $(0 < c_G < c_L < 1)$. Dies folgt aus $0 < s_L < s_G < 1$. Grund: Die Bezieher von Gewinneinkommen müssen selbst für ihr Alter vorsorgen, ihre Sparquote ist also höher als die der Arbeitnehmer. (4 Punkte)

b)

Aus (2) erhält man $G = Y - L$. Einsetzen in (1) und Umformen ergibt

$$\frac{L}{Y} = \frac{1 - c_G (1-t) - \frac{I}{Y} - \frac{A}{Y}}{(1-t)(c_L - c_G)} \qquad (*)$$

Der Bruch ist positiv: Wegen $t < 1$ und $c_G < c_L$ ist der Nenner größer als Null. Aus dem in der Aufgabenstellung gegebenen Hinweis folgt, daß dies auch für den Zähler gilt, denn wegen (3) hat man im Zähler

$$1 - c_G (1-t) - \frac{I}{Y} - \frac{A}{Y} = (1-t)(1-c_G) - \frac{I}{Y} \quad .$$

(7 Punkte)

c)

Umformen von (3) ergibt $t = A / Y$. Setzt man dies in die Formel für die Lohnquote $(*)$ ein

$$\frac{L}{Y} = \frac{(1-\frac{A}{Y})\,(1-c_G) - \frac{I}{Y}}{(1-\frac{A}{Y})\,(c_L - c_G)} \quad ,$$

so erhält man den Einfluß einer steuerfinanzierten Erhöhung der Staatsausgaben auf die Lohnquote durch Differenzieren nach A:

$$\frac{\partial(\frac{L}{Y})}{\partial A} = \frac{-I}{Y^2(1-\frac{A}{Y})^2(c_L - c_G)} = \frac{-I}{Y^2(1-t)^2(c_L - c_G)} < 0 \quad .$$

Die Lohnquote sinkt also.

Interpretation: Die staatliche Maßnahme hat zunächst zwei gegensätzliche Wirkungen:

Die Ausgabenerhöhung führt unmittelbar zu einem Anstieg der Güternachfrage.

Zur Finanzierung der höheren Ausgaben müssen jedoch die Steuern erhöht werden (Y ist nach (4) wegen Vollbeschäftigung konstant). Diese Steuererhöhung senkt das verfügbare Einkommen der Haushalte und damit auch deren Konsum. Dadurch sinkt die Güternachfrage.

Da die Haushalte bei einer Senkung der verfügbaren Einkommen ihren Konsum nicht im gleichen Umfang einschränken (die Konsumquoten c_L und c_G sind ja kleiner als Eins), ist dieser „Steuereffekt“ jedoch geringer als der „Ausgabeneffekt“. Insgesamt führt die staatliche Maßnahme daher zu einer Überschußnachfrage auf dem Güternmarkt. Da bereits Vollbeschäftigung herrscht, führt dies zu Preissteigerungen. Da annahmegemäß die Nominallöhne weniger flexibel sind als die Güterpreise, sinkt der Reallohn. Damit sinken auch die realen Lohneinkommen und die Lohnquote, die Kapitaleinkommen steigen. In der Folge wird von den Lohneinkommensbeziehern weniger und von den Kapitaleinkommensbeziehern mehr gespart. Da die Sparquote der Kapitaleinkommenbezieher höher ist als die der Arbeitnehmer, wird insgesamt jedoch mehr gespart. Dies bringt den Gütermarkt wieder ins Gleichgewicht. (12 Punkte)

d)

Aus (⁕) berechnet man

$$\frac{\partial(\frac{L}{Y})}{\partial I} = \frac{-1}{Y(1-t)\,(c_L - c_G)} < 0$$

Eine Erhöhung der Investitionen senkt die Lohnquote.

Auch höhere Investitionen führen zu einer Überschußnachfrage auf dem Gütermarkt mit Folgen, wie unter c) beschrieben.

(4 Punkte)

e)

Man erhält unter Ausnutzung der Ergebnisse aus c) und d)

$$\frac{\left|\frac{\partial(\frac{L}{Y})}{\partial A}\right|}{\left|\frac{\partial(\frac{L}{Y})}{\partial I}\right|} = \frac{\frac{I}{Y^2\,(1-t)^2\,(c_L - c_G)}}{\frac{1}{Y(1-t)(c_L - c_G)}} = \frac{I}{Y(1-t)} < 1$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\partial(\frac{L}{Y})}{\partial A}\right| < \left|\frac{\partial(\frac{L}{Y})}{\partial I}\right|$$

Die Investitionen haben also einen stärkeren Einfluß auf die Lohnquote, d.h. die Lohnquote sinkt stärker.

Grund: Höhere Investitionen wie auch höhere Staatsausgaben stellen eine Nachfrageerhöhung dar. Da die Staatsausgaben aber steuerfinanziert sind, ist der Nachfrageanstieg geringer, denn durch die Steuererhöhung sinkt wie oben beschrieben das verfügbare Einkommen und damit der Konsum. Die nachfolgenden Effekte (Preisanstieg, Reallohnsenkung) sind dann auch entsprechend schwächer ausgeprägt.

(6 Punkte)