1. Aufgabe

Es wird eine Volkswirtschaft betrachtet, deren Produktionsseite in zwei Sektoren unterteilt ist, die die Konsumgüter X und Y produzieren. Zur Güterproduktion werden die Produktionsfaktoren A und K eingesetzt, deren verfügbare Mengen exogen vorgegeben und konstant sind.
Die Produktionsmöglichkeiten der Volkswirtschaft werden durch die folgenden Produktionsfunktionen

(1) $\tilde{X} = \tilde{X}(\tilde{A}_x, \tilde{K}_x)$

(2) $Y = Y(A_y, K_y)$

mit

(3) $X = k\,\tilde{X}$

sowie durch die Faktormengenbeschränkungen

(4) $A_0 = k\,\tilde{A}_x + A_y$

(5) $K_0 = k\,\tilde{K}_x + K_y$

beschrieben. Dabei ist k die - variable - Zahl der Unternehmen in der Branche X. Das „~“-Zeichen kennzeichnet Größen, die sich auf die - identischen - Unternehmen der Branche X beziehen. Die Produktionsfunktion der Unternehmen dieses Sektors weist zunächst steigende Skalenerträge, dann konstante und danach fallende Skalenerträge auf. (2) ist die Branchenproduktionsfunktion des Sektors Y. (3) definiert den Output des Sektors X.

a) Leiten Sie die Bedingungen für den effizienten Faktoreinsatz in der Volkswirtschaft und die effiziente Unternehmenszahl (-größe) des Sektors X ab, und interpretieren Sie diese.
b) Zeigen Sie, daß in einem *langfristigen* Konkurrenzgleichgewicht die Bedingung für die effiziente Unternehmenszahl (-größe) im Sektor X erfüllt ist.
c) Die Unternehmen des Sektors X werden mit einer Gewinnsteuer belegt. Zeigen Sie, daß die Erhebung einer solchen Steuer der Realisierung der Bedingung für die effiziente Unternehmenszahl im Sektor X nicht im Wege steht.
d) Die Unternehmen des Sektors X werden mit einer - ertragsunabhängigen - Pauschalsteuer $T = T_0$ belegt. Zeigen Sie, daß die Erhebung einer solchen Steuer die Realisierung der Bedingung für die effiziente Unternehmenszahl im Sektor X verhindert.

Musterlösung

a)
Die Optimierungsaufgabe lautet:

max: $k\,\tilde{X}$

udN.: $\tilde{X} = \tilde{X}(\tilde{A}_x, \tilde{K}_x)$

$$Y(A_y, K_y) - \overline{Y} = 0$$

$$A_0 - k\,\tilde{A}_x - A_y = 0$$

$$K_0 - k\,\tilde{K}_x - K_y = 0$$

Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet:

$$L = k\,\tilde{X}(\tilde{A}_x, \tilde{K}_x) + \lambda\left[Y(A_y, K_y) - \overline{Y}\right]$$

3 Punkte

$$+\theta_a (A_0 - k\,\tilde{A}_x - A_y) + \theta_k (K_0 - k\,\tilde{K}_x - K_y)$$

Setzt man die ersten Ableitungen nach $k, \tilde{A}_x, \tilde{K}_x, A_y$ und K_y gleich null, so erhält man die folgenden notwendigen Bedingungen für ein Maximum:

(1) $$\frac{\partial L}{\partial k} = \tilde{X} - \theta_a\,\tilde{A}_x - \theta_k\,\tilde{K}_x = 0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial \tilde{A}_x} = k\left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x} - \theta_a\right) = 0$$

(1) $$\frac{\partial L}{\partial \tilde{K}_x} = k\left(\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x} - \theta_k\right) = 0$$

(2) $$\frac{\partial L}{\partial A_y} = \lambda\,\frac{\partial Y}{\partial A_y} - \theta_a = 0$$ 2 Punkte

(3) $$\frac{\partial L}{\partial K_y} = \lambda\,\frac{\partial Y}{\partial K_y} - \theta_k = 0$$

Aus (2) - (ergibt 5) sich:

(I) $$-\frac{d\tilde{K}_x}{d\tilde{A}_x} = \frac{\dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x}}{\dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x}} = \frac{\dfrac{\partial Y}{\partial A_y}}{\dfrac{\partial Y}{\partial K_y}} = -\frac{dK_y}{dA_y}$$ 2 Punkte

Aus (1) - (3) erhält man:

$$\tilde{X} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x}\,\tilde{A}_x + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x}\,\tilde{K}_x$$

bzw.

(II) $$1 = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x}\,\frac{\tilde{A}_x}{\tilde{X}} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x}\,\frac{\tilde{K}_x}{\tilde{X}} = \varepsilon_{\tilde{X}/\tilde{A}_x} + \varepsilon_{\tilde{X}/\tilde{K}_x}$$ 2 Punkte

Interpretation:

– Nach Bedingung (I) sind die Produktionsfaktoren dann effizient auf die beiden Branchen verteilt, wenn die entsprechenden Grenzraten der Faktorsubstitution einander gleich sind. 2 Punkte

– Nach Bedingung (II) ist die effiziente Unternehmenszahl in der Branche X realisiert, wenn in allen - identischen - Unternehmen der Branche die Summe der Produktionselastizitäten und damit die Skalenelastizität gerade eins beträgt. 2 Punkte

b)

Die Unternehmen maximieren bei Wettbewerb, d.h. bei gegebenen Güter- und gegebenen Faktorpreisen, die folgende Gewinnfunktion

$$\tilde{G}_x = \bar{p}_x\,\tilde{X}(\tilde{A}_x, K_x) - \bar{p}_a\,\tilde{A}_x - \bar{p}_k\,\bar{K}_x$$ 7 Punkte

Setzt man die ersten Ableitungen nach $\tilde{A}_x$ und $\tilde{K}_x$ gleich null, so erhält man die folgenden notwendigen Bedingungen für das Gewinnmaximum:

(a) $$\frac{\partial \tilde{G}_x}{\partial \tilde{A}_x} = \bar{p}_x\,\frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x} - \bar{p}_a = 0$$

(b) $\dfrac{\partial \tilde{G}_x}{\partial \tilde{K}_x} = \bar{p}_x \dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x} - \bar{p}_k = 0$

In einem *langfristigen* Konkurrenzgleichgewicht sind darüber hinaus alle Gewinne verschwunden, weshalb die *Nullgewinnbedingung*

(c) $\bar{p}_x \tilde{X} = \bar{p}_a \tilde{A}_x + \bar{p}_k \tilde{K}_x$

gilt.

Setzt man (a) und (b) in (c)ein, so erhält man:

$$\bar{p}_x \tilde{X} = \bar{p}_x \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x} \tilde{A}_x + \bar{p}_x \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x} \tilde{K}_x$$

bzw.

(II) $1 = \varepsilon_{\tilde{X}/\tilde{A}_x} + \varepsilon_{\tilde{X}/\tilde{K}_x}$

d.h. in einem langfristigen Konkurrenzgleichgewicht wird die effiziente Unternehmenszahl realisiert.

c)

Für die Gewinnsteuer gilt

$$\tilde{T} = t\, \tilde{G}_x^b$$

7 Punkte

wobei $\tilde{G}_x^b$ der Bruttogewinn ist.

Die Unternehmen streben danach, ihren Nettogewinn

$$\tilde{G}_x^n = (1-t)\, \tilde{G}_x^b = (1-t)\left[\bar{p}_x \tilde{X}(\tilde{A}_x, \tilde{K}_x) - \bar{p}_a \tilde{A}_x - \bar{p}_k \tilde{K}_x\right]$$

zu maximieren.

Im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht sind alle Nettogewinne verschwunden. Wegen $1 > t > 0$ gilt dann auch

$$\tilde{G}_x^b = \bar{p}_x \tilde{X}(\tilde{A}_x, \tilde{K}_x) - \bar{p}_a \tilde{A}_x - \bar{p}_k \tilde{K}_x = 0$$

und hierfür wurde bereits in b) gezeigt, daß sich die effiziente Unternehmenszahl einstellt.

Kurz: Da die Steuerbemessungsgrundlage $\tilde{G}_x^b$ gleich null ist, ist das Aufkommen dieser Steuer ebenfalls gleich null, weshalb sie keinerlei Auswirkungen hat.

d)

Im langfristigen Konkurrenzgleichgewicht gilt bei Erhebung einer Pauschalsteuer:

$$\tilde{G}_x^n = \tilde{G}_x^b - T_0 = \bar{p}_x \tilde{X}(\tilde{A}_x, \tilde{K}_x) - \bar{p}_a \tilde{A}_x - \bar{p}_k \tilde{K}_x - T_0 = 0$$

7 Punkte

Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein Gewinnmaximum verlangen wiederum, daß die Wertgrenzprodukte den Faktorpreisen entsprechen:

(a) $\bar{p}_x \dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x} = \bar{p}_a$

(b) $\bar{p}_x \dfrac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x} = \bar{p}_k$

Einsetzen führt zu:

$$\bar{p}_x \tilde{X} = \bar{p}_x \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x} \tilde{A}_x + \bar{p}_x \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x} + T_0$$

bzw.

$$1 = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{A}_x} \frac{\tilde{A}_x}{\tilde{X}} + \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{K}_x} \frac{\tilde{K}_x}{\tilde{X}} + \frac{T_0}{\overline{p}_x \tilde{X}}$$

weshalb

$$1 < \varepsilon_{\tilde{X}/\tilde{A}_x} + \varepsilon_{\tilde{X}/\tilde{K}_x}$$

gilt, d.h. die Skalenelastizität ist kleiner als eins, weshalb in einer zu geringen Zahl von Unternehmen ein zu großer Output produziert wird.

Häufig gemachte Fehler:

zu a)

– Es wurde nicht der Branchenoutput $k\,\tilde{X}$ sondern vielmehr der Unternehmensoutput $\tilde{X}$ maximiert.

zu b) - c)

– Es wurde nicht beachtet, daß in einem langfristigen Konkurrenzgleichgewicht die Unternehmensgewinne gleich null sind.

– Es wurde oft die folgende Gewinnfunktion maximiert:

$$G_x = k\tilde{G}_x = k\,\overline{p}_x\,\tilde{X}(\tilde{A}_x, \tilde{K}_x) - k\,\overline{p}_a\,\tilde{A}_x - k\,\overline{p}_k\,\tilde{K}_x$$

Daraus erhält man u.a.

$$\frac{\partial G_x}{\partial k} = \overline{p}_x\,\tilde{X} - \overline{p}_a\,\tilde{A}_x - \overline{p}_k\,\tilde{K}_x = 0$$

und hiermit ließ sich hinsichtlich der Frage nach der Unternehmenszahl richtig weiterrechnen [analoge Herleitungen gelten für c) und d)]. Da aber niemand in einer konkurrenzmäßig organisierten Modellwirtschaft da ist, der k als Aktionsparameter einsetzen kann, ist dieser Ansatz natürlich ökonomisch nicht sinnvoll. Wurde er trotzdem angewandt, so wurden bei b) - d) jeweils zwei Punkte abgezogen.

– Viele Kommilitonen/innen waren nicht in der Lage, die Steuerfunktionen korrekt zu spezifizieren.

2. Aufgabe

Die Regierung eines Landes plant die Erhöhung der Transferzahlung Z, die ausschließlich der Bevölkerungsgruppe 1 zukommt. Diese Zahlungen werden in voller Höhe durch eine Steuererhöhung finanziert. Da in Gruppe 1 gerade der Teil der Bevölkerung angesiedelt ist, der zu arm ist, um Steuern zu zahlen, wird die Bevölkerungsgruppe 2 alleine zur Finanzierung herangezogen. Diese Gruppe 2 hat einen relativen Anteil von g am Sozialprodukt. Die Zentralbank hat bereits angekündigt, die Geldmenge nicht auszudehnen. Die Staatsausgaben A werden nicht verändert.
Bestimmen Sie im Rahmen des folgenden Modells die Auswirkungen der Erhöhung eines solchen Transfers auf das Sozialprodukt:

(1) $Y = C^1 \left[(1-g)\,Y + Z\right] + C^2 \left[(1-t)\,g\,Y\right] + I\,(i) + A$

(2) $M = L(Y, i)$

(3) $Z = tg\,Y$

Bezeichnen Sie bitte wie folgt:

$$C_Y^1 = \frac{d\,C^1\left[(1-g)\,Y+Z\right]}{d\left[(1-g)\,Y+Z\right]} \qquad C_Y^2 = \frac{d\,C^2\left[(1-t)\,g\,Y\right]}{d\left[(1-t)\,g\,Y\right]}$$

a) Berechnen Sie den Effekt einer Erhöhung des Transfers auf das Sozialprodukt.
b) Bestimmen Sie das Vorzeichen des berechneten Multiplikators. Welche Bedingung muß gelten, damit er positiv ist?
c) Wie entwickelt sich das verfügbare Einkommen der Gruppe 2?
d) Interpretieren Sie die unter a) berechnete Veränderung des Sozialprodukts ausführlich ökonomisch. Gehen Sie von $dY > 0$ aus.

Musterlösung

a)

Das Modell wird total differenziert:

$$dY = C_Y^1\,(1-g)\,dY + C_Y^1\,dZ + C_Y^2\,(1-t)\,g\,dY - C_Y^2\,g\,Ydt + I_i\,di$$

$$0 = L_Y\,dY + L_i\,di$$

$$dZ = tg\,dY + g\,Ydt$$

5 Punkte

In Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1-C_Y^1\,(1-g)-C_Y^2\,(1-t)\,g & C_Y^2\,g\,Y & -I_i \\ L_y & 0 & L_i \\ t\,g & g\,Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dY \\ dt \\ di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_Y^1\,dZ \\ 0 \\ dZ \end{pmatrix}$$

Errechnen von dY:

$$dY = \frac{C_Y^1 - C_Y^2}{1-C_Y^1\,(1-g)-C_Y^2\,g+\dfrac{I_i\,L_Y}{L_i}}\,dZ$$

Das Ergebnis kann auch mit anderen Methoden gefunden werden. 5 Punkte

b)

Der Zähler ist positiv für $C_Y^1 > C_Y^2$.

Der Nenner kann zu $1 - C_Y^1 + g\,(C_Y^1 - C_Y^2) + \frac{I_i\,L_y}{L_i}$ umgeformt werden. Es gilt

$1 - C_Y^1 > 0$, da die Konsumquote kleiner als 1 ist.

$\frac{I_i\,L_y}{L_i} > 0$ aufgrund der Annahmen über den Geldmarkt.

5 Punkte

Mit der obigen Annahme $C_Y^1 > C_Y^2$ ist auch der Nenner und somit *dY* positiv. Die marginale Konsumquote der Empfänger muß größer sein als die marginale Konsumquote der Steuerzahler.

Es gibt auch Konstellationen, bei denen $C_Y^1 < C_Y^2$ und $dY > 0$ gilt. Diese werden hier nicht betrachtet.

c)

Der Konsum der Gruppe 2 hängt von ihrem verfügbaren Einkommen ab. Für dieses gilt

$$g\,d\left[(1-t)\,Y\right] = g\left[dY - \frac{dZ}{g}\right] = g\,dY - dZ\,.$$

Einsetzen von *dY*:

$$g\,\frac{(C_Y^1 - C_Y^2)dZ}{1 - C_Y^1 + g\left(C_Y^1 - C_Y^2\right) + \frac{I_i L_Y}{L_i}} - dZ$$

$$= -\frac{1 - C_Y^1 + \frac{I_i\,L_y}{L_i}}{1 - C_Y^1 + g\,(C_Y^1 - C_Y^2) + \frac{I_i\,L_y}{L_i}}\,dZ < 0$$

5 Punkte

Da das verfügbare Einkommen dieser Gruppe sinkt, sinkt auch ihr Konsum.

Bei einer verbalen Argumentation, die als einzige Änderung die Steuersatzänderung berücksichtigt und daraus eine Senkung des verfügbaren Einkommens folgert, sind 2 Punkte zu vergeben.

c)

C_Y^1: Mit steigendem Transfer steigt das verfügbare Einkommen der Gruppe 1 und damit der Konsum. Durch den steigenden Konsum steigen Nachfrage und Produktion.

2 Punkte

$-\,C_Y^2$: Durch die steigende Steuerzahlung sinkt das verfügbare Einkommen der Gruppe 2 und deren Konsum. Damit sinken Nachfrage und Produktion.

2 Punkte

Insgesamt soll der expansive Effekt überwiegen, so daß es zu einer Steigerung des Sozialproduktes kommt. Diese Steigerung wird in den Runden gedämpft:

$1 - C_Y^1\,(1-g)$: Das erhöhte Einkommen führt zu höherem Konsum der Gruppe 1. Dies führt wiederum zu steigender Produktion und erhöhtem Einkommen. Dieser Prozeß setzt sich nicht unendlich fort, da ein Teil des Einkommens gespart wird.

2 Punkte

2 Punkte

$-C_Y^2\, g$: Durch das steigende Y steigt auch das Einkommen der Gruppe 2, die daraufhin mehr konsumiert. Auch hier setzt sich der Prozeß nicht unendlich fort, da ein Teil des Einkommens gespart wird.

$\frac{I_i\, L_Y}{L_i}$: Durch das gestiegene Einkommen entsteht ein höherer Bedarf an Transaktionskasse. Da die Zentralbank die Geldmenge nicht erhöht, müssen die Haushalte Wertpapiere verkaufen, um Geld in die Transaktionskasse zu bekommen. Das vermehrte Wertpapierangebot führt zu Kurssenkungen. Da der Kurs $1/i$ ist, steigt der Zinssatz. Ein steigender Zinssatz führt zu sinkenden Investitionen. Damit sinken Sozialprodukt und Produktion.

Eine Argumentation, die direkt (ohne Beachtung des Wertpapiermarktes) auf steigende Zinsen schließt, wurde mit 2 Punkten bewertet. 5 Punkte

3. Aufgabe

Ein neoklassisches Modell sei durch folgende Gleichungen charakterisiert:

$$Y(t) = F(K(t), N(t))$$

$$\hat{N}(t) = g \qquad , g > 0$$

$$\dot{K}(t) = I(t) = S(t) = s \cdot Y(t) \qquad , 0 < s < 1$$

mit *Y(t)* : = Sozialprodukt

K(t) : = Kapitalstock

N(t) : = Erwerbsbevölkerung

g : = konstante Wachstumsrate der Erwerbsbevölkerung

S(t) : = Ersparnis

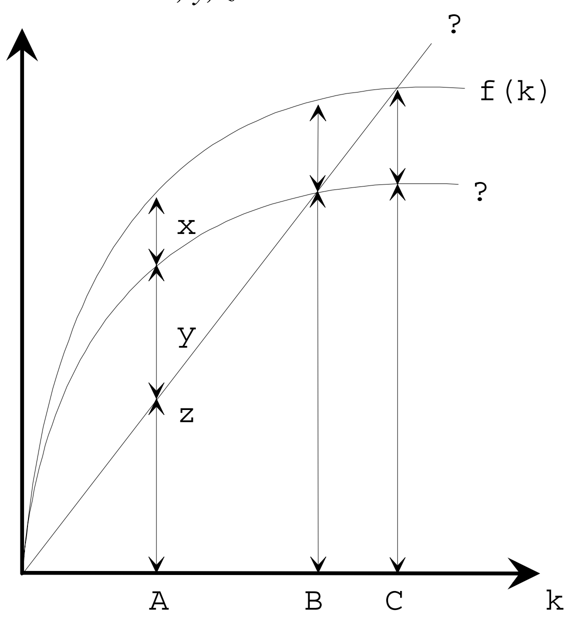
I(t) : = Investitionen

s : = konstante Sparquote

t : = Zeit

Die Produktionsfunktion habe die üblichen Eigenschaften.

a) Leiten Sie aus den Gleichungen die Fundamentalgleichung der neoklassischen Wachstumstheorie ab.
b) Vervollständigen Sie das folgende Diagramm und analysieren Sie die drei Situationen $k = A$, $k = B$, $k = C$ in Bezug auf Stabilität. Was messen die Strecken *x, y, z* ?



c) Nehmen Sie an, der Pro-Kopf-Konsum sei ein geeignetes Wohlfahrtsmaß. Geht es der Bevölkerung im Zeitablauf besser?
d) Analysieren Sie graphisch den Einfluß einer Senkung der Wachstumsrate der Erwerbsbevölkerung auf die Höhe des gleichgewichtigen Pro-Kopf-Konsums.
e) Wie beeinflußt die Höhe der Sparquote den gleichgewichtigen Pro-Kopf-Konsum? Leiten Sie - graphisch oder analytisch - die Bedingung für eine optimale Sparquote ab.

Musterlösung

a)
Aufgrund der Linearhomogenität erhält man als Pro-Kopf-Produktionsfunktion (die Abhängigkeit der Variablen von der Zeit t wird der Übersichtlichkeit halber weggelassen):

$$\frac{Y}{N} = \frac{F(K,N)}{N} = F\left(\frac{K}{N},1\right) =: f(k) \ ,$$

wobei $k := K/N$ die Kapitalintensität bezeichnet. Die Änderung der Kapitalintensität berechnet man nun als

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}N - \dot{N}K}{N^2} = \frac{\dot{K}}{N} - \hat{N}k = \frac{sY}{N} - gk = s f(k) - gk \ .$$

Im Wachstumsungleichgewicht gilt $\dot{k} = 0$, also

(∗) $s f(k^*) = k^* g$.

8 Punkte

b)

$? = g k$ (Gerade)

$? = s f(k)$ (Kurve)

$x =$ Konsum pro Kopf

$y = \dot{k}$, Änderung der Kapitalintensität

$z =$ Höhe des Investitionsbetrages, der pro Kopf investiert werden müßte, um die Kapitalausstattung pro Kopf trotz Bevölkerungswachstum auf dem Niveau A zu halten.

Stabilität:

B: Die Investitionen reichen gerade aus, um die neu hinzugekommenen Arbeitskräfte mit dem bisherigen Kapital-pro-Kopf Standard auszurüsten. Die Kapitalintensität bleibt daher unverändert (Wachstumsgleichgewicht).

A: Pro Kopf wird mehr investiert, als zum Ausgleich des Arbeitswachstums benötigt wird. Diese zusätzlichen Investitionen erhöhen die Kapitalausstattung pro Kopf.

C: Genau umgekehrt. Die Kapitalintensität sinkt.

Das Wachstumsgleichgewicht in B ist stabil, denn im Zeitablauf gleicht sich die Kapitalintensität immer mehr dem Gleichgewichtswert an.

7 Punkte

c)
Pro-Kopf-Konsum:

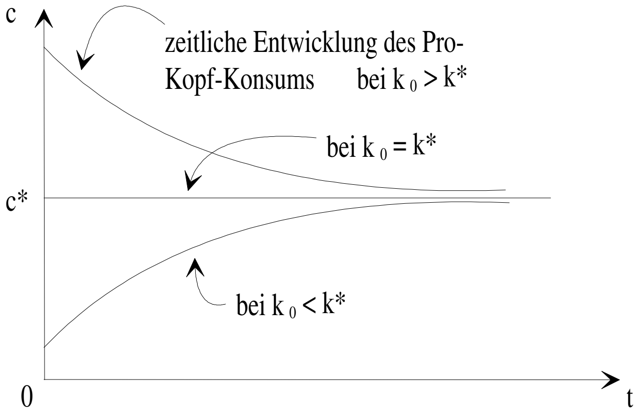
$$c := \frac{Y - I}{N} = \frac{Y - sY}{N} = (1-s)\frac{Y}{N} = (1-s) f(k) \ .$$

Zeitliche Änderung des Pro-Kopf-Konsums:

$$\dot{c} = (1-s) f'(k)\dot{k} \ .$$

Für $\dot{k} > 0$ gilt daher $\dot{c} > 0$. Befindet sich die Wirtschaft in einer Situation, in der die Kapitalintensität kleiner ist als die gleichgewichtige Kapitalintensität (in der Abbildung aus der Aufgabenstellung links von B), so steigt die Kapitalintensität im Zeitablauf und damit auch der Konsum pro Kopf. Ist die Kapitalintensität in der Ausgangssituation hingegen höher als im Wachstumsgleichgewicht (in der Abbildung rechts von B), so sinkt im Zeitablauf die Kapitalintensität $(\dot{k} < 0)$ und daher auch der Pro-Kopf-Konsum $(\dot{c} < 0)$. Im Wachstumsgleichgewicht selbst $(\dot{k} = 0)$ ist der Pro-Kopf-Konsum im Zeitablauf konstant $(\dot{c} = 0)$.

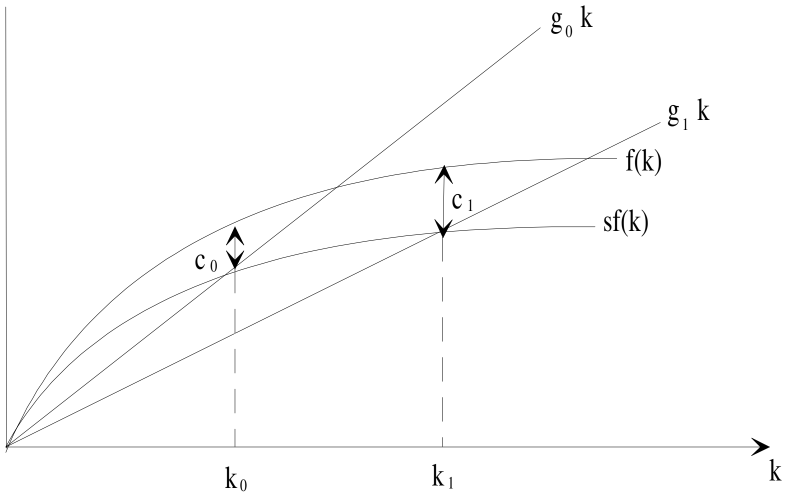
Graphisch dargestellt ergibt sich



worin k_0 die Kapitalintensität in der Ausgangssituation $t = 0$ bezeichnet, k^* die Kapitalintensität im Wachstumsgleichgewicht und c^* den Pro-Kopf-Konsum im Wachstumsgleichgewicht.

4 Punkte

d)



Sinkt die Wachstumsrate der Erwerbsbevölkerung von g_0 auf g_1, so dreht sich die Gerade nach unten. Dadurch steigt die Kapitalintensität im Wachstumsgleichgewicht von k_0 auf k_1 und der gleichgewichtige Pro-Kopf-Konsum steigt von c_0 auf c_1 .

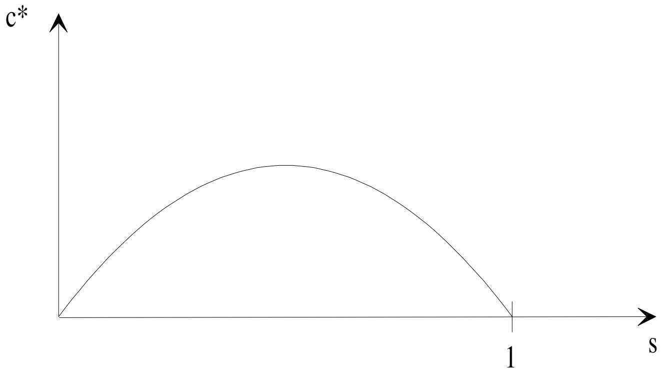
5 Punkte

e)

Der Zusammenhang von Sparquote s und Pro-Kopf-Konsum im Wachstumsgleichgewicht ist nicht so eindeutig, wie der im Aufgabenteil d) diskutierte Zusammenhang von g und c^*. Eine Erhöhung der Sparquote hat zwei Effekte, die einander entgegengerichtet sind:

– Bei gegebener Produktion sinkt der Konsum, da das, was gespart wird, nicht konsumiert werden kann.
– Andererseits fördert eine höhere Sparquote die Kapitalbildung und damit die Produktion pro Kopf, so daß insgesamt mehr für Sparen und Konsum zur Verfügung steht.

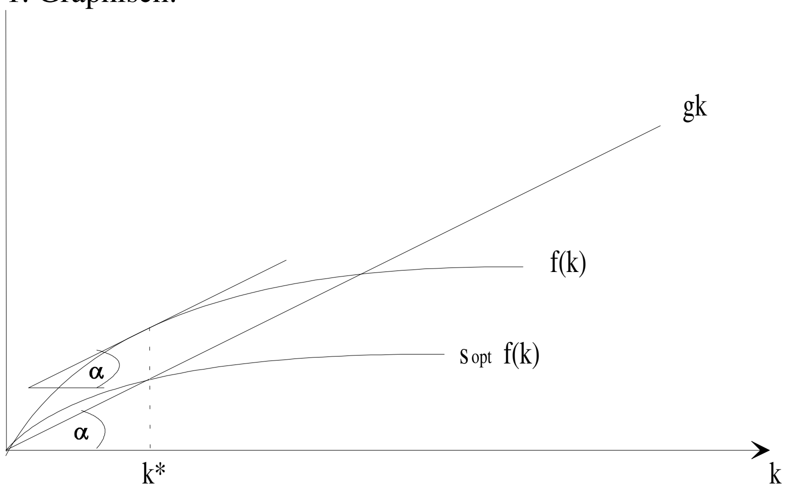
Bei einer kleinen Sparquote überwiegt der zweite Effekt, bei einer hohen Sparquote der erste. Man erhält somit den folgenden Zusammenhang:



4 Punkte

Herleitung der „golden rule" für eine optimale Sparquote:

1. Graphisch:



2. Analytisch:

Existenz und Eindeutigkeit des Wachstumsgleichgewichts vorausgesetzt, definiert die Bedingung (∗)

$$s\,f\,(k^*) = n\,k^*$$

einen funktionalen Zusammenhang zwischen Sparquote und Kapitalintensität im Wachstumsgleichgewicht $k^*(s)$. Durch implizites Differenzieren dieser Bedingung erhält man

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{f\,(k^*)}{g - s\,f'(k^*)} = \frac{f\,(k^*)\,k^*}{s\left[f\,(k^*) - k^*f'(k^*)\right]} > 0$$

Die Ungleichung gilt, da in der eckigen Klammer gerade die Grenzproduktivität der Arbeit steht.

Einsetzen von $(*)$ und $k^*(s)$ ergibt

$$
\begin{aligned}
c^*(s) &= f(k^*(s)) - s\,f(k^*(s)) \\
&= f(k^*(s)) - g\,k^*(s) \ .
\end{aligned}
$$

Die optimale Sparquote löst das Maximierungsproblem

$$\max_s \quad c^*(s)$$

Aus der Bedingung erster Ordnung für ein Maximum

$$\frac{dc^*}{ds} = f'(k^*)\frac{dk^*}{ds} - g\frac{dk^*}{ds} = 0$$

erhält man nach Division durch $\frac{dk^*}{ds} \neq 0$ die gesuchte Bedingung

$$f'(k^*) = g$$

5 Punkte