

**Klausur zur Veranstaltung
Ganzzahlige und Kombinatorische Optimierung**

Bearbeiter

Maximale
Punktzahl:
63

Matr.-Nr. : *Musterlösung ohne Gewähr*

Studienfach :

Semesterzahl :

Tragen Sie die Antworten bzw. Lösungen der einzelnen Fragen bitte **in den Vordruck** ein.
Bitte schreiben Sie **nicht** mit **Bleistift** oder **roter** Tinte.

Benutzbar sind: - alle in der Veranstaltung verteilten Algorithmen
(nicht die Aufgabensammlung, keine sonstigen Aufgaben.)

- Taschenrechner

Vordruck für die Bewertung der Arbeit
(nicht vom Bearbeiter auszufüllen)

Erreichte Punktzahl :

Note :

1. Zur ungarischen Methode

Wir betrachten ein 10×10 -Assignment-Problem, das mit der ungarischen Methode gelöst wird.

Nach der dritten Iteration können wir erst 7 unabhängige Nullen identifizieren. Daß das tatsächlich die Maximalzahl der unabhängigen Nullen ist, ergibt sich dadurch, dass alle Nullen mit 7 Deckungslinien überdeckt werden können.

Das kleinste nicht mit einer Deckungslinie überdeckte Element sei 2.

Geben Sie an, um wie viel der duale Zielwert mit Durchführung der folgenden Iteration steigt:

3

.....6.....

2. Ermittlung der maximalen Anzahl der unabhängigen Nullen

Für ein 10x10-Assignment-Problem habe sich bei Anwendung der ungarischen Methode die folgende Nullverteilung ergeben:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0*							0	
2	0*		0							
3		0		0						
4			0						0*	
5						0	0			
6					0		0*			0
7					0	0*		0		
8							0			0*
9	0			0*						
10								0*		

In der Matrix sind 8 unabhängige Nullen mit einem Stern gekennzeichnet. Markieren Sie in der folgenden Matrix diejenigen Nullen, die der Maximalzahl unabhängiger Nullen entsprechen:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0*							0	
2	0		0*							
3		0		0*						
4			0						0*	
5						0*	0			
6					0		0			0*
7					0*	0		0		
8							0*			0
9	0*			0						
10								0*		

5

Die folgenden beiden Matrizen sind zum „Ausprobieren“:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0							0	
2	0		0							
3		0		0						
4			0						0	
5						0	0			
6					0		0			0
7					0	0		0		
8							0			0
9	0			0						
10								0		

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		0							0	
2	0		0							
3		0		0						
4			0						0	
5						0	0			
6					0		0			0
7					0	0		0		
8							0			0
9	0			0						
10								0		

3. Simplexmethode: Wie die Koeffizienten der OPS geometrisch zu interpretieren sind

Im Rahmen der Simplexmethode liegt eine zulässige Basislösung vor, d.h. wir befinden uns in einer Ecke des zugehörigen Polyeders.

In Vorbereitung der nächsten Iteration sei die folgende OPS ausgewählt

Zeilen-Nr.	x_{ops}	Rechte Seite
1		4		12
2		3		15
3		-1		7
4		0		10

Die Auswahl der OPS bedeutet geometrisch die Auswahl einer mit der Ecke inzidierenden Kante, bzw. soweit die Kante über die beiden sie begrenzenden Ecken hinausweist: einer Schnittgeraden.

Die Schnittgerade und die darauf liegende Ausgangsecke (AE) sind im weiteren geometrisch dargestellt, wobei der zulässige Teil der Schnittgeraden, also die Kante, rechts von AE liegt:



Jede der obigen vier Restriktionszeilen bildet auf der Schnittgeraden tendenziell einen Schnittpunkt.

2

2

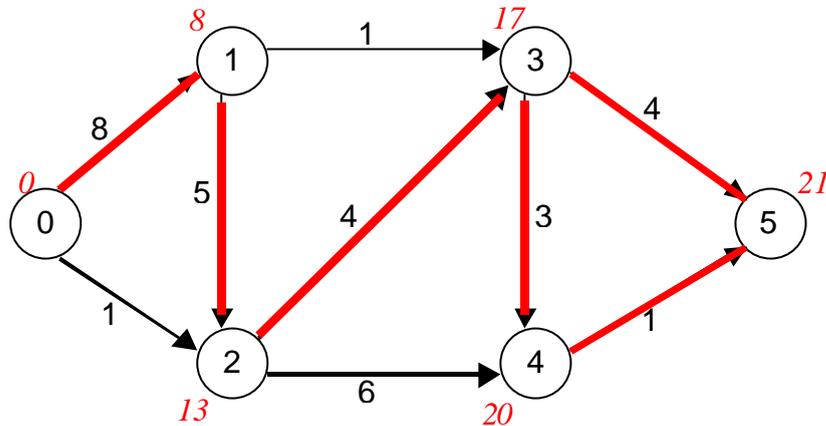
2

- Zeichnen Sie die tendenzielle Lage der einzelnen Schnittpunkte ein und bezeichnen Sie die einzelnen Schnittpunkte mit dem zugehörigen Zeilenindex.
- Schreiben Sie neben die einzelnen Schnittpunkte, ob es sich um eine „Ecke“ (E) handelt oder um einen „unzulässigen Schnittpunkt“ (US).
- Geben Sie an, welche Zeile nicht zu einem Schnittpunkt auf der Schnittgeraden führt und erläutern Sie, warum!

Die vierte Zeile führt zu keinem Schnittpunkt, da die zugehörige Hyperebene parallel zur Schnittgeraden verläuft.

4. CPM-Netzwerk (Capacity Smoothing)

Das folgende CPM-Netzwerk ist gegeben



1 a. Markieren Sie die Knoten mit den frühest möglichen Ereigniszeitpunkten.

1 b. Färben Sie diejenigen Kanten, die den kritischen Pfad bilden.

Für die Durchführung der folgenden Aktivitäten (fett ausgezogene Kanten)

0,2	2,3	2,4
-----	-----	-----

wird ein Bagger benötigt. Es steht nur ein Bagger zur Verfügung.

3 c. Erläutern Sie, wie - insbesondere in welcher Reihenfolge - diese drei Aktivitäten durchgeführt werden sollten.

Zuerst wird die Aktivität 0,2 durchgeführt, da die anderen beiden erst nach dieser beginnen. Die Aktivitäten 2,3 und 2,4 konkurrieren um den Bagger, da sie eigentlich beide ab dem Zeitpunkt 13 begonnen werden können. Durch den Engpass des Baggers ist die Aktivität 2,3 und anschließend die Aktivität 2,4 durchzuführen, da so die Verzögerung minimal gehalten wird.

1 d. Die (minimale) Projektdauer beträgt dann:²⁴..... (Zeiteinheiten)

5. Maximum Cardinality Matching

Gegeben ist ein vollständiger Graph mit den Knoten 1,2,3,4,5.

Gesucht ist ein „Maximum Cardinality Matching“:

Die Maximalzahl der Kanten, so daß jeder Knoten mit maximal einer Kante inzidiert!

Die Kanten sind also die Variablen, die den Wert Null oder Eins annehmen können. Im weiteren ist das System für das zugehörige Restriktionssystem gegeben:

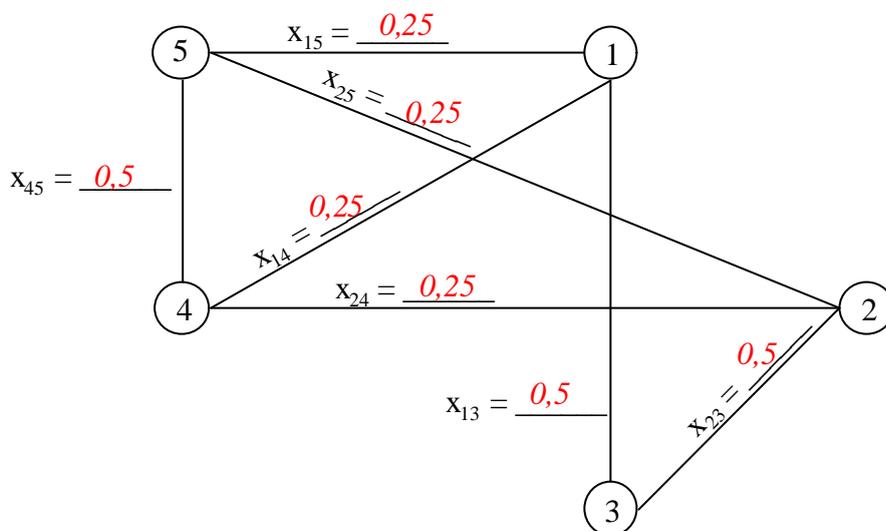
	X ₁₂	X ₁₃	X ₁₄	X ₁₅	X ₂₃	X ₂₄	X ₂₅	X ₃₄	X ₃₅	X ₄₅	Rel	R.S
Kn.1	1	1	1	1							£	1
Kn.2	1				1	1	1				£	1
Kn.3		1			1			1	1		£	1
Kn.4			1			1		1		1	£	1
Kn.5				1			1		1	1	£	1
Z _{max} :	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	=	0
	1	1			1						£	1
	1		1			1					£	1
	1			1			1				£	1
		1	1					1			£	1
		1		1					1		£	1
			1	1						1	£	1
					1	1		1			£	1
					1		1		1		£	1
						1	1			1	£	1
								1	1	1	£	1

- 2 a. Formulieren Sie in den Zeilen Kn.1 bis Kn.5 die Knotenrestriktionen: **Die mit einem Knoten inzidierenden Kanten müssen kleiner gleich Eins sein!**
- 1 b. Formulieren Sie in der Zeile Z_{max} die Zielfunktion!
- 3 c. Als Optimallösung dieses Restriktionssystems erhält man eine Lösung mit dem Zielwert 2,5, d.h. die Ecken des Polyeders sind nicht alle ganzzahlig. Die Fragestellung lautet also: wie gewähre ich die Ganzzahligkeit mittels Nebenbedingungen? Man könnte vermutlich Erfolg haben, wenn man für jeden Subgraphen mit ungerader Knotenzahl folgende Restriktionen hinzufügt: **Summe über die Kanten eines solchen Subgraphen ≤ auf die nächste ganze Zahl abgerundete Hälfte von dessen Knotenzahl.** Formulieren Sie diese Restriktionen in das obige System für die aus 3 Knoten bestehenden Subgraphen.

3

- d. Leider stellen die in der Teilaufgabenstellung 3. angesprochenen Nebenbedingungen keinen Garant für die Ganzzahligkeit dar. Die Restriktionen bezüglich der 3er wie auch der 5er Subgraphen führen nicht zum gewünschten Ergebnis.

Tragen Sie in den folgenden Graphen die Gewichtung x_{ij} der Kanten ein, so dass die in der Teilaufgabenstellung 3. angesprochenen Restriktionen eingehalten werden und ein Zielwert von 2,5 erreicht wird. Die nicht eingezeichneten Kanten (zur Erinnerung: die Aufgabenstellung bezieht sich auf einen vollständigen Graphen bestehend aus 5 Knoten) weisen die Gewichtung $x_{ij} = 0$ auf.



Erläuterung zur Teilaufgabe 4.:

Aufgrund einer mehrdeutigen Formulierung sind hier zwei Antworten gültig:

- die obige eingetragene Gewichtung,*
- die Aussage, dass keine die Bedingung erfüllende Gewichtung eingetragen werden kann, da gegen die Nebenbedingungen aus 3. verstoßen wird.*

Die Mehrdeutigkeit kommt dadurch zustande, dass „Subgraph“ nicht eindeutig definiert ist: es kann sich einerseits lediglich nur um einen Subgraphen handeln, bei dem die Knoten angegeben werden und das Kantengerüst aus dem vollständigen Graphen übernommen wird (was zur Antwort b) führt, da dann die Nebenbedingung $x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{23}+x_{24}+x_{25}+x_{34}+x_{35}+x_{45} \leq 2$ greift). Andererseits kann unter Subgraph jedoch auch ein Graph verstanden werden, der durch die Angabe der Knoten und deren Reihenfolge eindeutig definiert ist. So ist z.B. der Graph $\{5,1,3,2,4\}$ durch die fünf Knoten und die Kanten $x_{15}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{45}$ aufgespannt. Diese Interpretation des Begriffs „Subgraph“ führt zur Antwort a).

6. Abschätzung von Komplexitäten

Für ein neuartiges Optimierungsproblem, dessen Größe durch die Zahl n hinreichend beschrieben werden kann, sei ein spezieller Algorithmus entwickelt worden. Nunmehr stellt sich die Frage, ob die Anzahl der Iterationen (im worst case) polynomiell (=potenziell) oder exponentiell ist. Diese Frage ist häufig mathematisch so vertrackt, daß man das nicht sicher beantworten kann.

Dann kann man sich insofern helfen, indem man für eine große Zahl von Beispielen mit unterschiedlichem n die jeweils erforderliche Iterationszahl berechnet. Trägt man die jeweilige Iterationszahl auf der Ordinate und die jeweilige Problemgröße auf der Abszisse ab, so führen diese Rechenversuche in dem genannten Koordinatensystem zu einer in bestimmter Weise gestalteten Punktwolke.

Wie kann man nun, ohne viel zu rechnen (d.h. unter Einsatz von Excel), abschätzen, ob die Komplexität (bei durchschnittlichem Rechenverhalten)

- potenziell oder
- exponentiell ist?

Die Punkte als Diagramm darstellen lassen. Anschließend unter dem Excel-Menü „Diagramm“ die Option „Trendlinie hinzufügen“ zweimal ausführen, wobei beim Ersten der Typ „potenziell“ und beim Zweiten der Typ „exponentiell“ einzustellen ist. Als weitere Option gibt Excel das jeweilige Bestimmtheitsmaß an, woran die Güte des einzelnen Verfahrens (potenziell oder exponentiell) abzulesen ist.

7. Das Knapsack Problem (ein kombinatorisches Optimierungsproblem) (knapsack=Rucksack)

Ein Investor kann die Investitionsmöglichkeiten (Projekte) I1 bis I7 realisieren. Jede dieser Investitionsmöglichkeiten kann nur einmal oder keinmal gewählt werden. Das Investitionsvolumen und die jährlichen Erträge aus den Investitionen sind in folgender Tabelle gegeben:

Investitions- möglichkeiten	Investitions- volumen in GE	Ertrag pro Jahr		
		in GE	in %	
I ₁	200.000	18.000	9	X
I ₂	100.000	8.000	8	X
I ₃	500.000	35.000	7	X
I ₄	300.000	20.000	6,66	
I ₅	400.000	26.000	6,50	X
I ₆	500.000	31.000	6,20	
I ₇	100.000	6.000	6	X

- 2 Dem Investor stehen 1.300.000 GE zur Anlage zur Verfügung.
1. Markieren Sie diejenigen Investitionen, die in das gewinnmaximale Investitionsprogramm eingehen
 2. und geben Sie an, wie hoch der maximale Gewinn ist:**93.000**.....GE

8. Zur Lösung eines unsymmetrischen Travelling Salesman Problems

Ein unsymmetrisches 10x10-TS-Problem soll unter Verwendung des Assignment-problems als Relaxation mit Branch and Bound gelöst werden.

1. Inwiefern kann man „Solver“ bei der Lösung dieser Aufgabenstellung verwenden?

Beim Bounding kann Solver dafür eingesetzt werden, die jeweiligen Lösungen zu ermitteln.

2

2. Die erste Assignmentlösung habe einen Dreier- und einen Siebener-Zyklus. Über welchen der beiden Zyklen sollte man tunlichst branchen (es gibt zwei Gründe)?

Man sollte über den Dreier-Zyklus branchen, da hierbei weniger Äste entstehen und zusätzlich mehr Lösungen ausgeschlossen werden als beim Ausschluss des Siebener-Zyklus.

2

9. Minimum Weight Matching berechnet mit einem symmetrischen Assignment-Problem

Wir betrachten ein ungerichtetes Chinese Postman Problem, das 10 Knoten mit ungeradem Knotengrad hat. Für diese 10 Knoten ist ein „Minimum Weight Matching“ zu bestimmen. Die Kostenmatrix hat folgendes Aussehen

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	4	14	7	21	28	20	13	3	7
2		x	10	8	25	14	22	30	7	11
3			x	9	22	34	40	25	13	32
4				x	14	6	12	9	4	12
5					x	8	14	20	28	25
6						x	14	10	42	30
7							x	8	32	14
8								x	13	6
9									x	8
10										x

Da Matchings relativ schwer zu berechnen sind, kann man das Problem auch als symmetrisches Assignmentproblem lösen. Symmetrisch heißt: Man spiegelt die Kostenmatrix an der Hauptdiagonalen. Dann ist die Entfernung von i nach j genau so groß wie die Entfernung von j nach i . Oder anders gewendet: Man löst die ungerichtete Kante zwischen den Knoten i und j in zwei gegenläufig gerichtete Kanten mit gleich hohen Kosten auf.

Optimiert man eine solche symmetrische Matrix als (bipartites) AS-Problem, so erhält man nur Zweier-Zyklen, sie bilden das „Minimum Weight Matching“.

In diesem Fall erhält man mit der ungarischen Methode folgende Nullenverteilung, wobei die unabhängigen Nullen mit einem Stern markiert sind:

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	0							0*	0
2	0*	x	0							
3		0*	x	0						
4			0*	x					0	
5					x	0*	0			
6					0*	x				
7					0		x	0		0*
8							0*	x		0
9	0			0*					x	0
10	0						0	0*	0	x

Dieses Optimum besteht aber nicht nur aus Zweier-Zyklen sondern aus einem Zweier-, einem Dreier- und einem Fünfer-Zyklus.

Markieren Sie in der folgenden Matrix diejenige Optimallösung, die nur aus Zweier-Zyklen besteht:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x	0							0	0*
2	0	x	0*							
3		0*	x	0						
4			0	x					0*	
5					x	0*	0			
6					0*	x				
7					0		x	0*		0
8							0*	x		0
9	0			0*					x	0
10	0*						0	0	0	x

6

10. Ungarische Methode: Effiziente Ermittlung des Folge-Tableaus mit Excel

Wir wollen ein 8x8-Assignmentproblem mit der ungarischen Methode in einem Excel sheet berechnen. Im folgenden ist in den Zeilen 3 bis 10 des Excel sheets ein Tableau dargestellt, in dem alle Nullen mit sieben Deckungslinien überdeckt und sieben unabhängigen Nullen markiert sind:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2		1	2	3	4	5	6	7	8	
3	1	6	0	1	0	3	0	2	0*	0
4	2	14	7	3	5	0*	12	2	1	-1
5	3	0	5	0*	7	12	6	8	11	-1
6	4	1	7	0	7	0	14	0*	3	0
7	5	3	0*	7	8	12	7	6	5	-1
8	6	0*	5	0	3	9	12	7	6	-1
9	7	14	8	9	0*	2	0	7	9	0
10	8	5	0	3	7	9	12	7	6	-1
11		1	1	1	0	1	0	0	0	
12		1	2	3	4	5	6	7	8	
13	1									
14	2									
15	3									
16	4									
17	5									
18	6									
19	7									
20	8									
21										

Das minimale nicht gestrichene Element ist 1.

Trägt man (=tippt man) in der Spalte J und in der Zeile 13 des gegebenen Tableaus eine geeignete Ränderung ein, dann kann man das Folgetableau (in den Zeilen 13 bis 20 und den Spalten B bis I) sehr effizient wie folgt erzeugen:

- Eingabe einer Formel in das Feld B13
- Ziehen dieser Formel über die 8 Zeilen
- Ziehen der so entstandenen Spalte über die 8 Spalten (oder umgekehrt).

2

1. Tragen Sie die Ränderung ein!

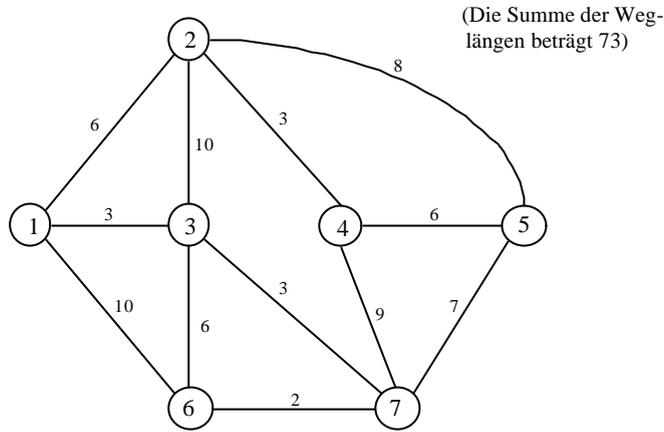
3

2. Geben Sie die in das Feld B13 einzutippende Formel an:

=.....**B3 + \$J3 + B\$11** (vergessen Sie nicht die \$-Zeichen!)

11. Das Problem des Briefträgers

a) Gegeben sei der folgende Stadtplan mit den angegebenen Weglängen:

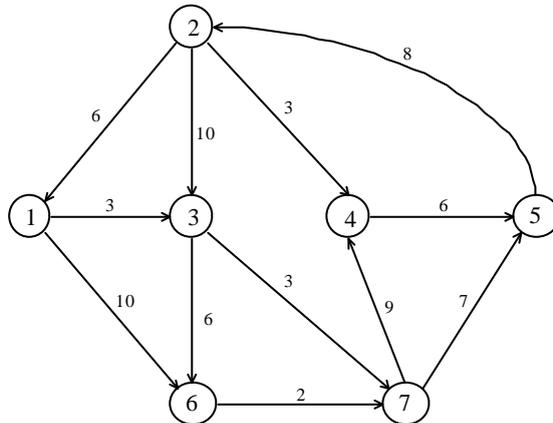


3

Wie lang ist die kürzeste Briefträgertour?87.....

Markieren Sie im obigen Graphen doppelt durchlaufene Kanten.

b) Wie ändert sich die Lösung, wenn alle Kanten wie folgt gerichtet sind:



5

Wie lang ist nun die kürzeste Briefträgertour?118.....

3

c) Wie lang ist die kürzeste Briefträgertour, wenn im Vergleich zu b) lediglich die Kante zwischen Knoten 2 und 4 ungerichtet ist?

.....98.....