Skript zur Vorlesung Mikroökonomik I

Version 1.5 vom 14. Januar 2002

Karl Dietrich, Astrid Loßin und Thomas Riechmann

Das Skript enthält die Vorlesungsunterlagen der drei Autoren. Es ist im Internet vefügbar unter der URL:
`http://kaldor.vwl.uni-hannover.de/wuv/lectures/scripts/wisem-2001-2002/mikro1.pdf`

Der prüfungsrelevante Stoff für die Klausur VWL 1 im Februar und Juli 2002 ist im Studienführer anhand der beiden Lehrbücher von Schumann et al. (1999) und Varian (1999) abgegrenzt.

Inhaltsverzeichnis

1 Gegenstand und Methoden **1**
- 1.1 Grundfragen des Wirtschaftens . . . 1
  - 1.1.1 Effizienz von Allokationen . . . 3
  - 1.1.2 Optimalität von Distributionen . . . 3
  - 1.1.3 Ökonomische Institutionen . . . 4
- 1.2 Methode . . . 5
  - 1.2.1 Modelle und deduktive Methode . . . 5
  - 1.2.2 Induktive Methode . . . 6
  - 1.2.3 Ein pragmatisches „als ob“ . . . 6
- 1.3 Grundfragen der Mikröokonomik . . . 6
  - 1.3.1 Homo oeconomicus . . . 7
  - 1.3.2 Eigeninteresse . . . 8
  - 1.3.3 Probleme bei Gruppenentscheidungen . . . 8
  - 1.3.4 Die Rolle der Mathematik . . . 9
  - 1.3.5 Spieltheorie bereichert die Mikroökonomik . . . 9

2 Präferenzen **10**
- 2.1 Güterraum . . . 11
  - 2.1.1 Güterquanta . . . 11
  - 2.1.2 Güterbündel . . . 12
  - 2.1.3 Teilbarkeit von Güterbündeln . . . 14
  - 2.1.4 Additivität von Güterbündeln . . . 15
  - 2.1.5 Konvexität des Güterraumes . . . 16
- 2.2 Präferenz-Axiome . . . 18
  - 2.2.1 Asymmetrie der starken Präferenz . . . 19
  - 2.2.2 Negierte Transitivität der starken Präferenz . . . 20
  - 2.2.3 Irreflexivität und Transitivität . . . 22
  - 2.2.4 Indifferenz . . . 22
  - 2.2.5 Schwache Präferenz . . . 23
  - 2.2.6 Zwischenergebnis . . . 23
  - 2.2.7 Konstruktion einer Nutzenfunktion . . . 24

2.2.8 Stetigkeit der Präferenzordnung . . . 26
2.2.9 Nicht-Sättigung . . . 29
2.2.10 Konstruktion einer Indifferenzkurve . . . 33
2.2.11 Strenge Konvexität der Indifferenzkurven . . . 36
2.2.11.1 Sekante . . . 37
2.2.11.2 Tangente . . . 38
2.2.11.3 Zweite Ableitung . . . 39
2.3 Exkurs: Mathematische Betrachtung der GRS . . . 41
2.3.1 Punkt-Richtungs-Form einer Geraden . . . 41
2.3.2 Indifferenz-Richtung . . . 43
2.3.3 Präferenz-Richtung . . . 46
2.3.4 Veränderungen an Güterbündeln sind Vektoren . . . 47
2.3.5 Die analytische Geradengleichung . . . 48
2.3.5.1 Tangente als Ergebnis einer Drehung . . . 50
2.3.5.2 Tangente als Ergebnis einer Verschiebung . . . 50
2.3.5.3 Tangente als lineare Approximation . . . 52
2.3.5.4 Zwischenergebnis . . . 54
2.3.6 Gesetz der abnehmenden GRS . . . 55
2.3.7 Zweite Ableitung und strenge Konvexität . . . 56
2.3.8 Strenge Konvexität im Rückblick . . . 59
2.4 Optimales Güterbündel . . . 60
2.5 Indifferenzkurven und Nutzenfunktion . . . 65
2.5.1 Produkt-Nutzenfunktion . . . 65
2.5.2 Summe-Nutzenfunktion . . . 67
2.5.3 Minimum-Nutzenfunktion . . . 68
2.5.4 Cobb-Douglas-Nutzenfunktion . . . 69
2.5.5 CES-Nutzenfunktion . . . 69
2.5.6 Quasi-lineare Nutzenfunktion . . . 70

3 Tausch und Markt **71**
3.1 Vereinzelter Tausch . . . 71
3.1.1 Die Edgeworth Box . . . 73
3.1.2 Der Verhandlungsspielraum . . . 76
3.1.3 Verengung des Verhandlungsspielraums . . . 77
3.1.4 Tauschgleichgewichte . . . 78
3.1.5 Optimale Distributionen in der Edgeworth Box . . . 80
3.2 Tausch zwischen vielen Tauschpartnern . . . 81
3.2.1 Koalitionen . . . 81
3.2.2 Das Walras-Gleichgewicht . . . 84
3.3 Vom Realtausch zu anonymen Märkten . . . 85
3.3.1 Verhaltensmuster der „Mengenanpassung“ . . . 87

3.3.2 Preisvektor, Tauschrichtung und Budgetgerade 88
3.3.3 Preisvektor und privat optimale Güterbündel 91
3.3.4 Markträumung und Konkurrenz-Gleichgewicht 93

4 Individuelle Nachfrage 94
4.1 Budgetbeschränkung 95
4.2 Optimaler Warenkorb 96
4.2.1 Geometrische Darstellung 98
4.2.2 Analytische Berechnung 99
4.2.2.1 Produkt-Nutzenfunktion 99
4.2.2.2 CES-Nutzenfunktion 100
4.3 Einkommens-Konsum-Kurven 101
4.3.1 Homothetische Präferenzen 102
4.3.2 Superiore und inferiore Güter 103
4.3.3 Engel-Kurven 105
4.4 Preis-Konsum-Pfade 106
4.4.1 Nachfragekurve und Kreuznachfragekurve 108
4.4.2 Alternative Verläufe der Kreuznachfragekurve 109
4.4.3 Nicht normale Verläufe der Nachfragekurve 110
4.4.3.1 Nicht streng konvexe Indifferenzkurven 110
4.4.3.2 Giffen Güter 111
4.4.4 Einkommens- und Substitutionseffekt 112
4.5 Anwendungen des Nachfragemodells 114
4.5.1 Die Vorteilhaftigkeit einer Pauschalsteuer 115
4.5.2 Die Wahl zwischen Konsum und Freizeit 117
4.5.3 Intertemporale Konsumentscheidung 119
4.6 Allgemeine Nachfragefunktion 122
4.6.1 Anmerkungen zur Methode 122
4.6.2 Allgemeine und spezielle Nachfragekurven 123
4.6.3 Eigenschaften der allgemeinen Nachfragekurven 125
4.6.3.1 Invarianz bei Vervielfachung aller Argumente 125
4.6.3.2 Unabhängigkeit vom gewählten Nutzenindex . 126
4.6.3.3 Ausschöpfung des Budgets 127
4.6.4 Indirekte Nutzenfunktion 127
4.7 Allgemeine Ausgabenfunktion 128
4.7.1 Geometrische Konstruktion 128
4.7.2 Berechnung des Ausgabenminimums 130
4.7.2.1 Produkt-Nutzenfunktion 130
4.7.2.2 CES-Nutzenfunktion 131
4.7.3 Kompensierte Nachfragekurven 132
4.7.4 Äquivalente Einkommensvariation 134

4.7.5 Ausgaben- und indirekte Nutzenfunktion 135
4.7.6 Allgemeine und kompensierte Nachfragefunktionen . . 136
4.8 Slutsky-Gleichung 137
4.8.1 Slutsky-Gleichung und kompensierte Nachfrage 137
4.8.2 Hilfssatz von Hotelling 138
4.8.3 Slutsky-Gleichung mit Änderungsraten 141
4.8.4 Slutsky-Zerlegung 142
4.8.5 Slutsky-Gleichung der Slutsky-Zerlegung 143
4.9 Elastizitäten der Nachfrage 144
4.9.1 Geometrische Darstellung 145
4.9.2 Güterklassifikation anhand von Elastizitäten 147
4.9.2.1 Einkommenselastizität der Nachfrage 147
4.9.2.2 Preiselastizität der Nachfrage 147
4.9.2.3 Kreuzpreiselastizität der Nachfrage 148
4.9.3 Beziehungen zwischen den Elastizitäten 148
4.10 Konsumentenrente 149
4.10.1 Konsumentenrente als Fläche 150
4.10.2 Konsumentenrente und direkte Nachfragekurve 153
4.10.3 Harberger-Dreieck 155
4.10.4 Marginale Zahlungsbereitschaft 156
4.10.5 Bemerkungen zur Konsumentenrente 160
4.11 Bekundete Präferenzen 161
4.11.1 Prinzip der bekundeten Präferenzen 161
4.11.2 Schwaches Axiom der bekundeten Präferenzen 162
4.11.3 Starkes Axiom der bekundeten Präferenzen 163
4.11.4 Durchführung eines Tests 164
4.11.5 Falsifikation versus Modifikation 165
4.12 Marktnachfrage 166

A Bibliographie **167**

Kapitel 1

Gegenstand und Methoden

Die Wirtschaftswissenschaften gehören zu den Gesellschaftswissenschaften. Ihr Gegenstand und die Methoden unterscheiden sie von ihren Nachbardisziplinen beispielsweise der Psychologie oder der Soziologie. So wie die Zahlentheorie als „Königin der Mathematik“ angesehen wird, beanprucht die allgemeine Gleichgewichtstheorie eine gewisse Führungsrolle in den Wirtschaftswissenschaften und wird ihr von den meisten Ökonomen auch zuerkannt. Die Kurse zur Mikroökonomik sollen den Studierenden einen unmittelbar nachvollziehbaren Zugang zu der teilweise doch recht anspruchsvollen Gleichgewichtstheorie eröffnen.

1.1 Grundfragen des Wirtschaftens

Jede Gesellschaft ist mit dem Problem der Knappheit konfrontiert. Darunter wird in der Regel verstanden, dass der Bedarf der Gesellschaft an Gütern ihre Mittel übersteigt. Begründet wird das Problem der Knappheit meist mit einem Hinweis auf die beschränkte Zeit, die zwischen der Güterproduktion und deren Konsumption aufzuteilen ist. Es gibt jedoch auch weiter gefasste Darlegungen des Knappheitsproblems.

> Nicht in einem Mangel an Gütern gründet der wesentliche Tatbestand der Arbeit, nicht in einem Zurückbleiben der jeweils vorhandenen und verfügbaren Güterwelt hinter den Bedürfnissen des Menschen, sondern gleichsam umgekehrt in einem wesentlichen Überschuß des menschlichen Daseins über jede mögliche Situation seiner selbst und der Welt: das menschliche Sein ist immer *mehr* als sein jeweiliges Dasein, — es übersteigt jede mögliche Situation und steht gerade deshalb in der unaufhebbaren Diskrepanz zu ihr: eine Diskrepanz, die ein dauerndes Arbeiten an ihrer

> Überwindung fordert, obwohl das Dasein doch nie im Besitz seiner selbst und seiner Welt ausruhen kann.
> (Marcuse, 1965, S. 27)

Das Zitat aus dem Aufsatz „Über die philosophischen Grundlagen des wirtschaftswissenschaftlichen Arbeitsbegriffs“ von Herbert Marcuse soll Zweierlei klarzustellen:

Erstens ist Knappheit der Güter durch eine „unaufhebbare Diskrepanz“ gekennzeichnet, somit kann es weder zu einer Sättigung der Bedürfnisse kommen, noch kann sie durch den Weg des Buddha — den Weg der Bedürfnislosigkeit — überwunden werden.

Zweitens ist Arbeiten und Produzieren nicht nur Herstellen von Gütern, sondern zugleich auch Selbstverwirklichung und -vergegenständlichung des Menschen.

Aus der Knappheit folgen die beiden Grundfragen des Wirtschaftens:

1. Was, womit, wie und wieviel soll produziert werden?
2. Wie soll das Produzierte auf die Mitglieder der Gesellschaft verteilt werden?

Der erste Fragenkreis bezieht sich auf den Arbeits- oder Produktionsprozess, der zweite auf den Verteilungsaspekt des Wirtschaftens.

Die beiden Grundfragen bilden den Ausgangspunkt wirtschaftswissenschaftlicher und vor allem gleichgewichtstheoretischer Betrachtungen. Die erste wird als das Problem der *Allokation* und die zweite das der *Distribution* bezeichnet. Unter einer Allokation wird eine Verteilung von Gütern auf alternative Verwendungen in der Produktion verstanden, unter einer Distribution eine Verteilung auf die Konsumenten. Allokationen beziehen sich in erster Linie auf (Produktions-) Beziehungen zwischen Gütern, während sich Distributionen in erster Linie auf (Eigentums-) Beziehungen zwischen Menschen und Gütern beziehen. Sie stehen nicht unabhängig nebeneinander. Mit der Beantwortung der Frage, was und wieviel produziert werden soll, ist bereits eine Vorentscheidung darüber gefallen, bzw. eine Begrenzung dessen gegeben, was zur Verteilung auf die Mitglieder der Gesellschaft ansteht. Umgekehrt wird sich zeigen, dass eine Distribution im Sinne einer Anfangsausstattung auch den möglichen Allokationen Beschränkungen auferlegt.

1.1.1 Effizienz von Allokationen

Vor dem Hintergrund der Knappheit kann die Güte einer Allokation daran gemessen werden, inwieweit es möglich ist mehr Outputs zu erzeugen, indem die knappen Inputs des Produktionsprozesses anders auf alternative Verwendungen aufgeteilt werden. Eine Allokation heißt *effizient*, falls es keine solche Outputsteigerung mehr gibt. In der Regel existieren viele effiziente Allokationen. Sie unterscheiden sich dadurch, dass sich der Output des einen Gutes nur noch vermehren lässt zu Lasten der Verminderung des Outputs anderer Güter.

Das Kriterium der effizienten Allokation beruht auf der Anwendung des sogenannten ökonomischen Prinzips auf eine Allokation, wonach „mit gegebenen Mitteln ein möglichst großer Ertrag zu erwirtschaften“ ist (Maximalprinzip). Eine duale Formulierung besteht darin „ein gegebenes Ziel mit möglichst geringem Aufwand zu erreichen“ (Minimalprinzip).

1.1.2 Optimalität von Distributionen

Analog zur Effizienz lässt sich bei der Distribution fragen, ob es möglich ist durch eine andere Verteilung der Outputs auf die Mitglieder der Gesellschaft jemanden besser zu stellen, ohne andere schlechter zu stellen. Eine Distribution heißt (Pareto-) *optimal*, falls es nicht mehr möglich ist durch Umverteilen der Outputs jemanden besser zu stellen, ohne dass anderen geschadet wird. In der Regel gibt es viele optimale Distributionen. Sie unterscheiden sich dadurch, dass jemand durch Umverteilen nur zu Lasten anderer besser gestellt werden kann.

Auch das Kriterium der Optimalität beruht auf der Anwendung des ökonomischen Prinzips, diesmal auf eine Distribution: Maximiere das Wohlergehen einer Person unter der Voraussetzung, dass alle übrigen Mitglieder der Gesellschaft nicht schlechter gestellt werden.

Optimalität ist jedoch kein Kriterium der Gerechtigkeit, wie man sich anhand eines einfachen Beispiels klarmacht. Angenommen, es soll eine bestimmte Menge eines Gutes auf die Personen A und B verteilt werden. Erhält Person A drei Viertel der Menge, dann ist es optimal an Person B das restliche Viertel zu verteilen. Tatsächlich sind alle Aufteilungen von Null bis Hundert Prozent an A und der Rest an B optimale Distributionen. Die meisten Menschen würden spontan die hälftige Aufteilung als gerechte Distribution bezeichnen.

1.1.3 Ökonomische Institutionen

Im Laufe der Menschheitsgeschichte haben sich verschiedene Regeln und Verfahrensweisen im Umgang mit den Grundfragen des Wirtschaftens entwickelt. Sie werden als ökonomische Institutionen bezeichnet.

Marx hatte dafür den Begriff „Produktionsverhältnisse“ wie folgt geprägt:

> In der gesellschaftlichen Produktion ihres Lebens gehen die Menschen bestimmte, notwendige, von ihrem Willen unabhängige Verhältnisse ein, Produktionsverhältnisse, die einer bestimmten Entwicklungsstufe ihrer materiellen Produktivkräfte entsprechen. Die Gesamtheit dieser Produktionsverhältnisse bildet die ökonomische Struktur der Gesellschaft, die reale Basis, worauf sich ein juristischer und politischer Überbau erhebt und welcher bestimmte gesellschaftliche Bewußtseinsformen entsprechen. Die Produktionsweise des materiellen Lebens bedingt den sozialen, politischen und geistigen Lebensprozeß überhaupt. Es ist nicht das Bewußtsein der Menschen, das ihr Sein, sondern umgekehrt ihr gesellschaftliches Sein, das ihr Bewußtsein bestimmt.
> (Marx, 1961, S. 8 f.)

Die behauptete Einseitigkeit der Beeinflussung des „Überbaus“ durch die „Basis“ darf füglich bezweifelt werden.

In den Kursen zur Mikroökonomik werden zwei ökonomische Institutionen genauer untersucht: Märkte und Firmen. Eine Institution — der Staat — wird einfach unterstellt, ohne sein Zustandekommen zu erklären. Er hat die einzige Aufgabe, den gewaltlosen Umgang der Menschen miteinander sicherzustellen.

Allokation und Distribution stellen Beziehungen von Gütern untereinander und von Menschen zu Gütern dar, ökonomische Institutionen dagegen haben Beziehungen der Menschen untereinander zum Gegenstand. Sie bilden gewissermaßen das Band, das die Gesellschaft zusammen bringt und hält.

Damit ist zunächst einmal der Gegenstand der Wirtschaftswissenschaften umrissen: sie untersuchen (und erklären)

1. die Allokation (knapper Ressourcen auf alternative produktive Verwendungen),
2. die Distribution (der Güter auf die Mitlieder der Gesellschaft) und
3. ökonomische Institutionen (als Regeln und Verfahrensweisen der Menschen untereinander).

1.2 Methode

1.2.1 Modelle und deduktive Methode

Anders als in den Naturwissenschaften lassen sich nur für wenige wirtschaftswissenschaftliche Fragestellungen kontrollierte Experimente mit Menschen durchführen. Der überwiegende Teil der Erkenntnisse wird im Wege von Gedankenexperimenten gefunden. Solche Gedankenexperimente werden anhand vereinfachter und beschönigter Abbilder der Realität durchdacht. Diese Abbilder werden als Modelle bezeichnet.

Modelle werden bespielsweise auch für Windkanaltests im Flugzeugbau eingesetzt. Die dabei eingesetzten miniaturisierten Flugzeuge besitzen keine Innenausstattung und keinen Motor, da diese keinen direkten Einfluss auf die aerodynamischen Eigenschaften ausüben. Andererseits ist die Außenhaut vermutlich viel glatter und regelmäßiger als bei einem richtigen Flugzeug. Bei der fehlenden Innenausstattung handelt es sich um eine Abstraktion, bei der Glätte und Regelmäßigkeit des Rumpfes um Idealisierungen eines realen Flugzeuges.

Beim Abstrahieren besteht die Kunst darin nur die wesentlichen Faktoren zu berücksichten. Darüber aber, was bei einer vorgelegten Fragestellung wesentlich ist, gehen die Meinungen der Ökonomen manchmal weit auseinander. Auch bei den Idealisierungen — den Beschönigungen — gehen die Meinungen auseinander. Ein Beispiel für eine allgemein akzeptierte Idealisierung ist die beliebige[1] Teilbarkeit der Güter. Die wenigsten Güter, beispielsweise Autos, sind beliebig teilbar, dennoch erleichtert es Berechnungen ungemein, weil dadurch mit Gütermengen genauso wie mit (dimensionsbehafteten) positiven reellen Zahlen kalkuliert werden kann.

Ökonomische Modelle gehen aus von vereinfachenden und idealisierenden Annahmen über ein bestimmtes Szenario des Wirtschaftens. Daraus werden dann logisch gültige Schlussfolgerungen gezogen. Die Modellergebnisse sind zugleich Prognosen über das zu erwartende Geschehen in der Realität bei ähnlichen Umständen wie im Modell angenommen. Diese sogenannte deduktive Methode, wonach aus Prämissen empirisch überprüfbare Prognosen hergeleitet werden, weist zwei gravierende Schwächen auf. Zum einen können Modelle von Wesentlichem abstrahieren, dann mögen sie zwar korrekt sein, sie können aber nicht zu Prognosen verwandt werden, da die Voraussetzungen niemals auch nur annähernd erfüllt sein werden. Andererseits kann ein Modell, auch wenn es am empirischen Test scheitert, keineswegs so ohne weiteres verworfen werden, da empirische Tests zufalls- und fehlerbehaftet

[1] Manche sprechen auch von der unendlichen Teilbarkeit der Güter, was aber nicht korrekt ist.

sind.

1.2.2 Induktive Methode

Neben der deduktiven Methode gibt es noch die induktive Methode. Dabei wird versucht aus vielen Beobachtungen Rückschlüsse auf ein gemeinsames Prinzip zu ziehen. Auch die induktive Methode hat ihre Schwächen. Aus Beobachtungen können sich widersprechende Schlüsse gezogen werden, sodass sich kein allgemeines Prinzip ergibt, sondern im Extremfall jede Beobachtung als einmaliges Ereignis betrachtet wird.

1.2.3 Ein pragmatisches „als ob“

Die Konsequenz ist ein pragmatisches Verfahren, wonach mit Modellen begonnen wird, die dann durch Konfrontation mit dem empirischen Befund nach und nach verfeinert und verallgemeinert werden, um möglichst vielfältige Erscheinungen des Wirtschaftens zu beschreiben und zu erklären.

Wenn in einem ökonomischen Modell die Voraussetzungen im Großen und Ganzen für eine bestimmte reale Situation zutreffen, und die Prognose mit dem beobachteten realen Ereignis in etwa übereinstimmt, dann wird daraus der Schluss gezogen, die in der Situation agierenden Menschen hätten sich so verhalten, *als ob* sie demselben Kalkül der im Modell unterstellten homines oeconomici folgten. Das einschränkende „als ob“ ist notwendig, da wir als Wirtschaftswissenschaftler niemals wirklich wissen können, was die beobachteten Individuen tatsächlich veranlasst sich so und nicht anders zu verhalten. Selbst durch eine Befragung lässt sich dies nicht mit Sicherheit erfahren, da die Individuen entweder ihre Motivation selbst nicht verstehen, oder sie nicht die Wahrheit sagen, etwa weil sie ihr Motiv für nicht gesellschaftsfähig halten, oder sie ein Interesse daran haben die wahren Gründe zu verschleiern.

1.3 Grundfragen der Mikröokonomik

Die erste Grundfrage der Mikröokomik lautet: Wie bilden sich Preise aus dem freiwilligen Handeln vieler Einzelindividuen? Es ist die Frage nach der Existenz von Marktgleichgewichten. Die zweite Grundfrage lautet: Wieviele Gleichgewichte gibt es? Dies ist die Frage nach der Eindeutigkeit von Gleichgewichten. Und die dritte Grundfrage lautet: Ist ein Gleichgewicht stabil? Die Fragen nach Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität von Gleichgewichten werden ergänzt durch eine Beurteilung von Gleichgewichten hinsichtlich

ihrer Effizienz und Optimalität. Im Zuge der Beantwortung dieser Grundfragen ergeben sich Empfehlungen für wirtschaftspolitische Eingriffe, für den Fall, dass die Marktresultate unerwünschte Eigenschaften aufweisen. Etwaige Nebenwirkungen solcher Interventionen gehören selbstverständlich mit zu solchen Empfehlungen.

1.3.1 Homo oeconomicus

Ein wesentlicher Baustein in ökonomischen Modellen ist die Spezies des *homo oeconomicus*. Angehörige dieser Spezies sind fiktive Personen, die stets nach dem ökonomischen Prinzip entscheiden und handeln, also versuchen, ihre Zielvorstellungen — worin auch immer diese bestehen — bei gegebenen Beschränkungen (beispielsweise ihrem Einkommen) möglichst weitgehend umzusetzen. Welche Ziele verfolgt werden und welche Beschränkungen dabei vorliegen, unterscheidet sich in der Regel zwischen den Angehörigen der Spezies. Es ist für das Verhalten nach dem ökonomischen Prinzip ohne Belang, ob Ziele beispielsweise religiöse Motive wie Nächstenliebe oder ethische Normen beinhalten oder nicht. Sind Ziele und Beschränkungen bekannt, lässt sich induktiv auf das Verhalten oder die Entscheidung eines Angehörigen der Spezies homo oeconomicus schließen; bei geeigneter Präzisierung ist sein Verhalten sogar mathematisch berechenbar.

Beschränkungen können insbesondere auch die vermuteten Verhaltensweisen anderer sein. Dadurch bekommt die eigene Planung ein strategisches Moment. Wenn aber die anderen ebenfalls die Verhaltensweisen Dritter als Nebenbedingung beachten, dann gerät die Argumentation leicht in einen Teufelskreis: „ich denke, dass sie denkt, dass ich dächte, sie dächte . . . “. Wie entkommt man diesem Teufelskreis? Einmal, indem die vermuteten Verhaltensweisen als Konvention, oder als Handeln nach bestimmten Regeln gedeutet wird. Oder alternativ kann auch die Fragestellung insgesamt umgekehrt werden, also „Was würde ich tun, wenn ich an ihrer Stelle wäre und mich fragen würde, was sie tun würde . . . “.

Wir Menschen entscheiden und verhalten uns in wirtschaftlichen Belangen aber anscheinend nicht immer so wie ein homo oeconomicus; wir tun manchmal — aus freiem Willen — ganz verrückte Sachen. In dem Maße, in dem diese Verrücktheiten oder Spielereien aber als Experimente aufgefasst werden können, als Versuche, Neues zu entdecken, verlieren solche Verhaltensweisen den Charakter des Irrationalen und werden zum — durchaus vernünftigen — lernenden Umgang mit dem Ungewissen und Unbekannten. Die Erforschung dieses Bereiches ökonomischen Verhaltens bei unvollkommener Information und ungleicher Informationsverteilung steht erst an ihrem Anfang.

1.3.2 Eigeninteresse

Im Zentrum der Mikroökonomik steht die Frage, wie Individuen im wohlverstandenen Eigeninteresse mit dem Problem der Allokation und Distribution umgehen und wie dabei ökonomische Institutionen entstehen und sich verfestigen. Der individualistische Gesellschaftsansatz ist allein schon deswegen sinnvoll, da der zu erklärende gesellschaftliche Zusammenhalt, soweit er ökonomisch bedingt ist, nicht vorausgesetzt wird. Diese Herangehensweise kann allzu leicht dazu führen, das Handeln im Eigeninteresse als „Egoismus“ und die Institutionen als Resultat „altruistischen“ (d.h. selbstlosen, in erster Linie am Gemeinwohl orientierten) Handelns zu deuten.

Das folgende Beispiel mag den Voreiligen zu denken geben. In vielen Bereichen der Arbeitswelt gibt es Kaffee-Klubs, mit zwei einfachen Regeln: erstens werden die Ausgaben für Kaffeepulver und Filtertüten reihum von den Teilnehmern finanziert und zweitens setzt derjenige, der die letzte Tasse entnimmt, eine neue Kanne auf. Offensichtlich sind solche Kaffee-Klubs Institutionen, die auf der freiwilligen Einhaltung der Regeln beruhen und allen Teilnehmern Vorteile verschaffen, denn wenn man schon mal Kaffee aufsetzt, macht es keinen großen Unterschied, dies für sich alleine oder den ganzen Klub zu tun. Allerdings könnte ein Mitglied auf den Gedanken kommen die letzte Tasse zu nehmen ohne neuen zu machen. Was ein solches Mitglied — im wohlverstandenen Eigeninteresse — aber davon abhält, ist die Gefahr, dass sich der Kaffee-Klub von selbst auflöst und seine Vorteile verloren gehen, wenn sich alle so verhalten.

1.3.3 Probleme bei Gruppenentscheidungen

Auf Gruppenentscheidungen wird weitgehend verzichtet, da diese möglicherweise gar nicht zustande kommen, oder aber in sich widersprüchlich sein können. Das berühmte Abstimmungs-Paradoxon von Condorcet dient dem Nachweis einer möglichen Inkonsistenz[2] von Gruppenentscheidungen. Angenommen, drei Personen A, B und C sollen gemeinsam eine Entscheidung über drei Alternativen x, y und z treffen, wobei demokratisch über jeweils zwei Alternativen abgestimmt wird. Die Rangordnung der Alternativen ist von Person zu Person verschieden. Für Person A steht x an erster Stelle, gefolgt von z und danach y, für Person B steht y an erster Stelle, gefolgt von x und z und für Person C steht z an erster Stelle, gefolgt von y und x. Die Rangordnungen sind in der nachstehenden Tabelle zusammengefasst.

[2] In dem sehr lesenswerten Buch von Dixit und Nalebuff (1995, S. 260 ff) werden viele praktische Beispiele dazu erörtert.

	A	B	C
1	x	y	z
2	z	x	y
3	y	z	x

Wird zunächst zwischen Alternative x und y abgestimmt, so erhält die Alternative y eine Stimme von B und C, also zwei Stimmen, während nur A für x stimmt. Damit wäre Alternative y gewählt. Wird statt dessen zwischen x und z abgestimmt, dann erhält die Alternative x zwei Stimmen (von A und B) und wäre gewählt. Die Abstimmung zwischen y und z schließlich ergibt eine Stimmenmehrheit für z (eine Stimme von A und C). Die Gruppenentscheidung hängt also davon ab, welches Alternativen-Paar zuerst zur Abstimmung gestellt wird. Wenn die Gruppenmitglieder gleichberechtigt sind, kommt erst gar keine Tagesordnung bzw. Abstimmungsreihenfolge zustande. Wenn die Gruppe einen Sprecher hat, dann wird dieser — bei Kenntnis der Rangordnungen — die Tagesordnung in seinem Sinne handhaben.

1.3.4 Die Rolle der Mathematik

Die Mikroökonomik kommt nicht ohne Mathematik aus. Mathematische Verfahren sind rein formal, also gleichgültig gegenüber einer wie auch immer gearteten ökonomischen Bedeutung. Deshalb erfordert der Gebrauch mathematischer Verfahren eine begleitende Interpretation, wenn er nicht reiner Selbstzweck sein soll. Jedes mathematische Symbol, jede mathematische Formel und jede mathematische Umformung von Ausdrücken muss sich rechtfertigen und interpretieren lassen. Oder umgekehrt ist per Annahme dafür zu sorgen, dass der wirtschaftliche Sachverhalt eine bestimmte mathematische Eigenschaft aufweist.

Im Kurs Mikroökonomik I wird vorausgesetzt, dass die Mathematik, so wie sie in der Schule in aller Regel im Minimalprogramm unterrichtet wurde, von den Studierenden beherrscht wird. Im Wesentlichen sind dies Grundkenntnisse über Vektoren und Geraden, sowie die geometrische Interpretation einer Kurvendiskussion.

1.3.5 Spieltheorie bereichert die Mikroökonomik

In jüngster Zeit wird das Verhalten von Marktteilnehmern zunehmend Spieltheoretisch interpretiert. Die Spieltheorie ist eine Methode, mit der sich vor allem das Verhalten bei gegenseitiger Beeinflußung — also bei strategischer Interdependenz — darstellen und untersuchen lässt. Weiter erlaubt die Spieltheorie die Modellierung ungleicher Informationsverteilungen auf die Akteure und gestattet es das Verhalten auch experimentell genauer zu erfassen.

Kapitel 2

Präferenzen

In diesem Abschnitt wird die Art und Weise beschrieben, wie Menschen Güterbündel oder Warenkörbe nach ihrer Nützlichkeit bewerten. Nutzen ist ein Maß für die Wohlbefindlichkeit, die aus dem Konsum eines Güterbündels resultiert. Da jeder Mensch einzigartig ist, kann ein solches Maß jedoch nicht für interpersonelle Vergleiche herangezogen werden. Aber auch für eine einzelne Person stellt dieses Maß nur eine Rangordnung — seine Präferenzordnung — über die Güterbündel dar. Die Nützlichkeit eines Güterbündels ist im Allgemeinen auch nicht die Summe der Wertschätzungen seiner Bestandteile.

Trotz der vielen Einschränkungen und Verneinungen werden Gemeinsamkeiten bei der Zuordnung von Nutzen zu Güterbündeln unterstellt. Diese Annahmen über die Wertschätzung von Gütern spielen eine so wesentliche Rolle, dass sie als Präferenz-Axiome bezeichnet werden. Ein Axiom ist eine Grundvoraussetzung, die nicht bewiesen wird, möglicherweise auch nicht beweisbar ist, aber doch einigermaßen einleuchtet. Wegen der axiomatischen Grundlegung bezeichnet man den hier dargestellten Ansatz auch als die axiomatische Nutzentheorie.

Die Präferenz-Axiome bilden den Ausgangspunkt der Überlegungen zu den Güterbewertungen, Ziel ist es jedoch ein analytisches Werkzeug — Nutzenfunktionen — und ein geometrisches Werkzeug — Indifferenzkurven als Höhenlinien einer Nutzenfunktion — bereitzustellen, welche sich in den nachfolgenden Abschnitten als unverzichtbar erweisen. Am Ende des Abschnitts werden dann, nach Einführung einer Zeitbeschränkung für den Konsum, diese Werkzeuge eingesetzt, um solche Güterbündel zu betrachten, die von den Konsumenten als „die besten unter den gegebenen Umständen“, also als optimal angesehen werden.

Der Abschnitt dient auch dazu, die ökonomischen Sachverhalte mathematisch auszudrücken und umgekehrt einen mathematischen Sachverhalt, wie beispielsweise der Richtung einer Geraden, einen bestimmten mikroökonomi-

schen Sinn zu verleihen. Weiterhin gibt es einen mathematischen Exkurs zur sogenannten Grenzrate der Substitution, wo detailliert die Tangente an einer Kurve betrachtet wird.

2.1 Güterraum

Bevor die Bewertung von Güterbündeln dargestellt wird, ist es notwendig, Annahmen über ihre Beschaffenheit zu treffen. Güterbündel sind aus unterschiedlichen Gütersorten zusammengesetzt. Wie Gütersorten zu unterschieden sind, wird zunächst noch nicht erklärt. Wesentlich ist nur, dass es verschiedene Gütersorten gibt, wie uns der Alltag lehrt.

2.1.1 Güterquanta

Aus der Vielzahl unterschiedlicher Güter greifen wir eine bestimmte Sorte heraus, beispielsweise Filtertüten für Kaffee. Diese gibt es in verschiedenen Marken, Größen und Packungen, wovon jedoch abstrahiert wird. Betrachtet werden ganz schlicht Filtertüten für Kaffee. Sie können gezählt werden, was heißt, dass die Anzahl von Filtertüten eine natürliche Zahl ist. Auch Bruchteile von Filtertüten können einen ökonomischen Sinn haben, beispielsweise $\frac{47}{30}$ Filtertüten als durchschnittlicher Tages-Verbrauch eines Kaffee-Klubs bei einem monatlichen Gesamtverbrauch von 47 Filtertüten. Damit machen bereits die nicht-negativen rationalen Zahlen als Maßangaben für Güterquanta einen Sinn. Der nächste Schritt ist eine Idealisierung.

Die Güterquanta jeder Gütersorte sollen so wie nicht-negative reelle Zahlen behandelt werden können. Das bedeutet, dass von jeder Gütersorte das Quantum kontinuierlich im Bereich größer oder gleich Null liegt.

Die Notation eines Güterquantums unterscheidet sich, je nachdem, ob ein ganz bestimmtes, oder ein beliebiges gemeint ist. Wenn ein ganz bestimmtes Güterquantum gemeint ist, wird dafür

- entweder die betreffende reelle Zahl, beispielsweise 1.5667 geschrieben[1],
- oder ein Buchstabe, wie a, z.T. mit einem Superskript, z.B. $a^{2001-06}$ mit der Bedeutung „Durchschnitt der verkauften Einheiten im Juni 2001“, der betreffenden Sorte.

[1] Die Verwendung eines Dezimalpunktes statt eines Dezimalkommas kann als ein bescheidener Beitrag zur Internationalisierung des Studienganges angesehen werden, der dem „deutschen Interesse“ keinen schwerwiegenden Abbruch tut.

Wenn ein beliebiges Güterquantum gemeint ist, also irgend eines, dessen numerischer Wert unbekannt ist, dann wird dafür nur ein Buchstabe, wie z.B. x, geschrieben. Dieses x ist dann im mathematischen Sinne eine Unbekannte oder eine (freie) Variable. Jedes andere Zeichen — beispielsweise ein Smily — würde denselben mathematischen Zweck erfüllen, nämlich Platzhalter für eine unbekannte Zahl zu sein.

Die eingangs angesprochene beliebige Teilbarkeit der Güterquanta besagt nun: ist x ein Quantum einer bestimmten Sorte, dann ist auch

$$\alpha x$$

ein Quantum derselben Sorte, wobei α eine nicht-negative reelle Zahl ist.

Güterquanta sind dimensionsbehaftete Zahlen, beispielsweise 47 Filtertüten. Aus der jeweiligen Dimension kann oftmals auf die ökonomische Bedeutung eines mathematischen Ausdruckes zurückgeschlossen werden.

2.1.2 Güterbündel

Um bei der Einführung von Güterbündeln einfache graphische Darstellungen gebrauchen zu können, werden vorläufig nur zwei Gütersorten unterschieden: Gut 1 und Gut 2. Güterbündel (oder Warenkörbe) sind zusammengesetzt aus einem bestimmten Quantum von Gut 1 und einem bestimmten Quantum des Gutes 2. Güterbündel werden

(Quantum von Gut 1, Quantum von Gut 2)

geschrieben, da die Zusammensetzung betont werden soll. Für ein beliebiges Güterbündel x schreibt man

$$x = (x_1, x_2)$$

Güterquanta werden durch nicht-negative reelle Zahlen angegeben. Güterbündel werden durch Listen nicht-negativer Zahlen angegeben. Was für den Wirtschaftswissenschaftler ein Güterbündel ist, wird von einem Mathematiker als Punkt oder als Vektor angesehen. Die verwendete Notation entspricht genau der in der Mathematik üblichen, wonach die Komponenten mit einem Subskript unterschieden werden, und alle Komponenten durch Kommata getrennt und von runden Klammern eingeschlossen den Vektor symbolisieren.

Zwei Güterbündel $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ sind dann identisch, wenn beide dasselbe Quantum von Gut 1 und dasselbe Quantum von Gut 2 enthalten. Und auch umgekehrt, wenn das Quantum von Gut 1, x_1, in einem Güterbündel x gleich dem Quantum von Gut 1, y_1, in einem anderen

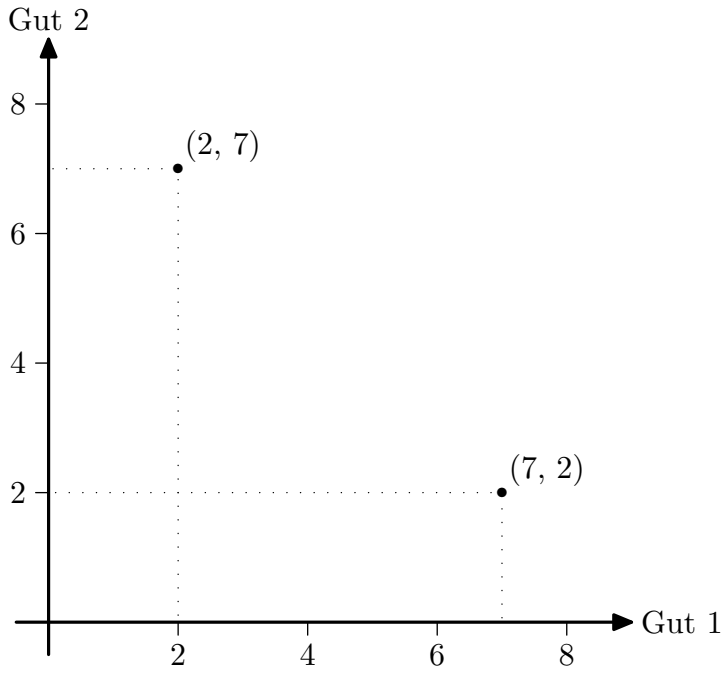
Güterbündel y ist und auch das Quantum von Gut 2, x_2, im Güterbündel x gleich dem Quantum von Gut 2, y_2, im Güterbündel y ist, sind die beiden Güterbündel identisch:

$$x = y \iff \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \end{cases}$$

Das Güterbündel (2, 7) ist beispielsweise aus 2 Einheiten des Gutes 1 und 7 Einheiten des Gutes 2 zusammengesetzt. Offensichtlich ist (7, 2) ein ganz anderes Güterbündel, nämlich eines, das 7 Einheiten von Gut 1 und 2 Einheiten von Gut 2 aufweist.

Die Menge (im mathematischen Sinne) aller Güterbündel ist Teil einer Ebene, genauer der nicht-negative Quadrant der kartesischen Ebene. Einzelne Punkte darin repräsentieren Güterbündel, wobei die Güterquanta der beiden Sorten an den Koordinaten-Achsen ablesbar sind. Üblicherweise wird die erste Komponente eines Güterbündels nach rechts und die zweite nach oben abgetragen. Dieser mathematischen Konvention kommt keine besondere ökonomische Bedeutung zu.

Abbildung 2.1: Güterraum

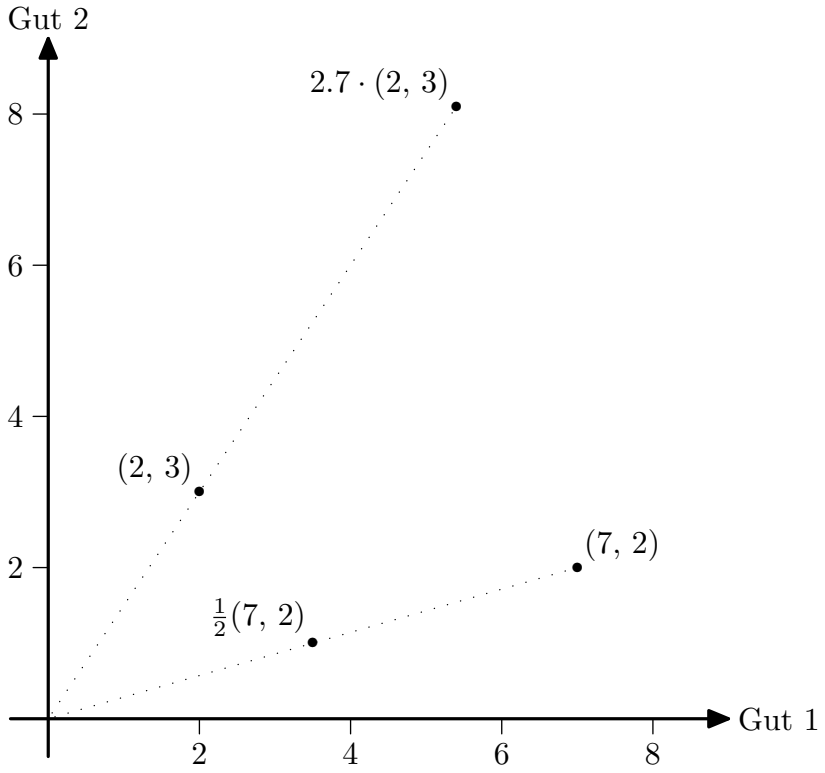


Die Beschränkung auf genau zwei unterschiedliche Gütersorten kann und wird an anderer Stelleaufgehoben. Allerdings können die Güterbündel bei drei verschiedenen Gütersorten nur noch mit großem Aufwand graphisch dargestellt werden, und bei vier oder mehr verschiedenen Gütersorten ist dies unmöglich. Wird die Anzahl der Gütersorten indessen auf eine einzige reduziert, dann geht der für die Mikroökonomik zentrale Aspekt der unterschiedlichen Zusammensetzung von Güterbündeln verloren.

2.1.3 Teilbarkeit von Güterbündeln

Die Eigenschaft der beliebigen Teilbarkeit der einzelnen Gütersorten wird komponentenweise an Güterbündel vererbt. Betrachtet man ein Güterbün-

Abbildung 2.2: Vielfache eines Güterbündels



del, dann soll beispielsweise das halbierte Bündel gerade die Hälfte jeder Gütersorte enthalten und das 2.7-fache Güterbündel eben das 2.7-fache jeder Gütersorte. Vielfache desselben Güterbündels x° besitzen alle diesselbe

Proportion der Güterquanta. Sie liegen im Güterraum auf einer Halbgeraden durch den Nullpunkt.

Allgemein und mathematisch ausgedrückt: Ist (x_1, x_2) ein Güterbündel, dann ist auch für eine beliebige nicht-negative reelle Zahl α das α-fache davon

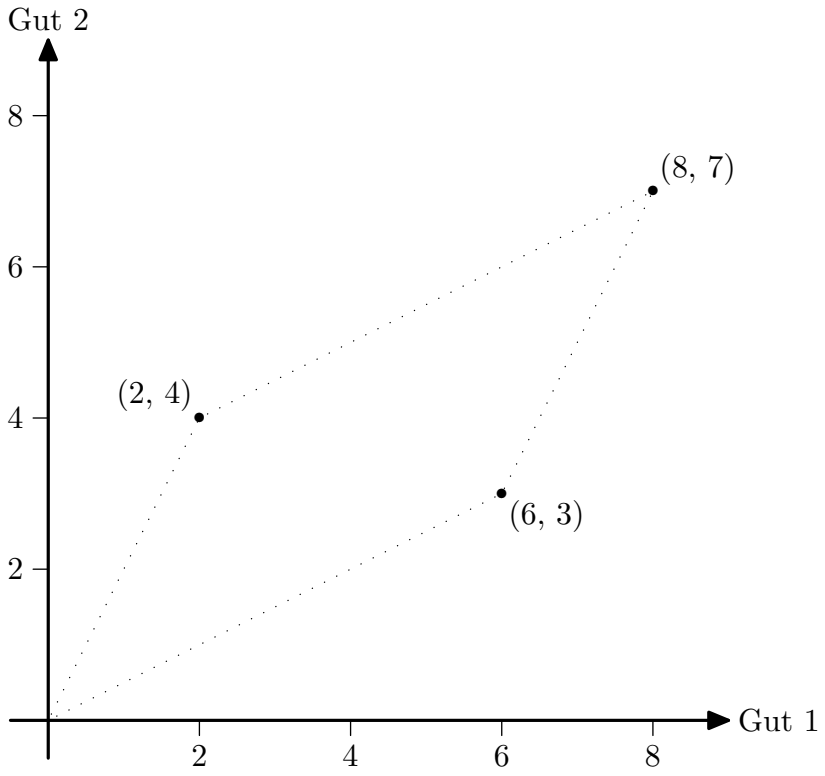
$$\alpha \cdot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

ein Güterbündel.

2.1.4 Additivität von Güterbündeln

Aus zwei unterschiedlichen Güterbündeln kann durch komponentenweises Zusammenfassen der beiden Gütersorten ein neues, aggregiertes Güterbün-

Abbildung 2.3: Additivität von Güterbündeln



del gemacht werden. Die Additivität ist nur deshalb sinnvoll, weil in jedem Güterbündel vereinbarungsgemäß das Quantum von Gut 1 an erster Stelle und das Quantum von Gut 2 an zweiter Stelle steht. Andernfalls würden die besagten Äpfel und Birnen addiert. Güterbündel mit vielen Sorten werden

im Alltag addiert, wenn beispielsweise mehrere Studierende sich zu einer WG zusammenschließen, oder Freunde sich zum Grillieren treffen und jeder etwas mitbringt. Sind $(x_1,\, x_2)$ und $(y_1,\, y_2)$ zwei Güterbündel, dann ist auch

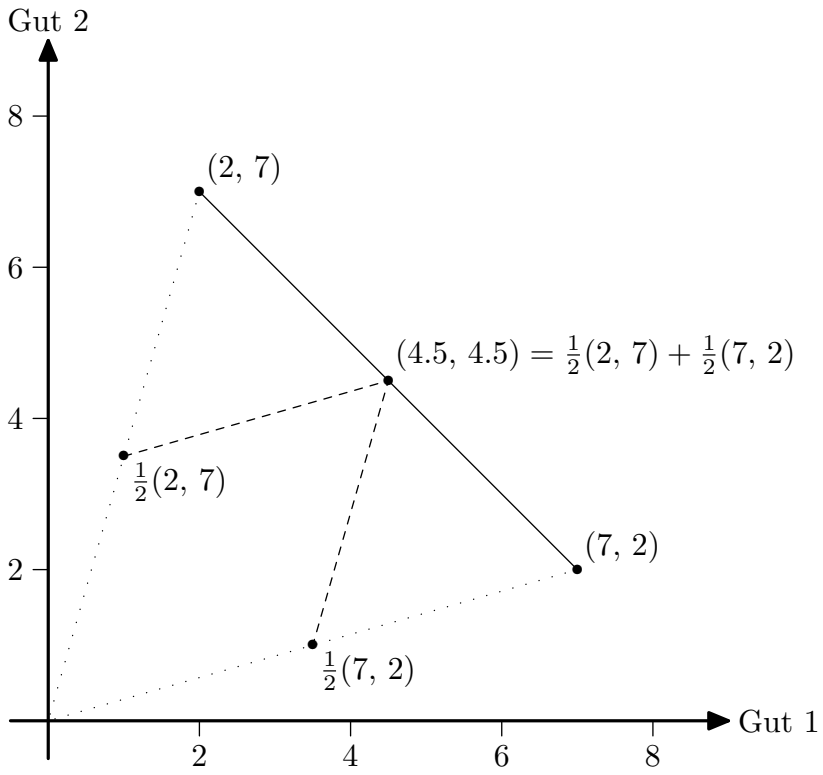
$$(x_1,\, x_2) + (y_1,\, y_2) = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2)$$

ein Güterbündel. Auch mehr als zwei Güterbündel lassen sich addieren, die Reihenfolge in der sie addiert werden ist dabei unerheblich.

2.1.5 Konvexität des Güterraumes

Aus der beliebigen Teilbarkeit und Additivität von Güterbündeln folgt die Eigenschaft der Konvexität des Güterraumes. Sind $(x_1,\, x_2)$ und $(y_1,\, y_2)$ zwei

Abbildung 2.4: Konvexität des Güterraumes



Güterbündel, dann ist auch das gewogene arithmetische Mittel

$$(1 - \lambda) \cdot (x_1,\, x_2) + \lambda \cdot (y_1,\, y_2) = ((1 - \lambda)x_1 + \lambda y_1,\, (1 - \lambda)x_2 + \lambda y_2)$$

für $0 \leq \lambda \leq 1$ ein Güterbündel. Ist $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$, dann gibt es keine Mischung ist $0 < \lambda < 1$, dann liegt das gemischte Güterbündel auf der Verbindungsstrecke von Güterbündel x nach y. Tritt noch ein drittes Güterbündel (z_1, z_2) hinzu, dann lautet die Konvexkombination

$$\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z\,, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\,,$$

wobei $0 \leq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \leq 1$. Alle Konvexkombinationen aus drei Güterbündeln ergeben die Fläche eines Dreiecks. In ähnlicher Weise bilden die Konvexkombinationen (endlich) vieler Güterbündel ein Vieleck. Ein alltägliches Beispiel für eine Konvexkombination zweier Güterbündel ist die Mischung von Apfelschorle aus Apfelsaft und Mineralwasser.

2.2 Präferenz-Axiome

Betrachtet wird ein Konsument, der für Güterbündel eine Rangordnung aufstellen soll. Dazu soll er jeweils zwei Güterbündel miteinander in ihrer Nützlichkeit vergleichen. Zur relativen Wertschätzung soll er zunächst nur das Urteil „ist besser als“ fällen. Dieser Vergleich heißt starke Präferenz und es wird für „a ist besser als b“ abkürzend $a \succ b$ geschrieben. Solch ein paarweiser Vergleich zweier Elemente derselben Menge (dem Güterraum) wird in der Mathematik als zweistellige Relation bezeichnet.

Es soll gezeigt werden, dass es zur Konstruktion einer Rangordnung für alle Güterbündel ausreicht, für die zweistellige Relation der starken Präferenz die Eigenschaften Asymmetrie und negierte Transitivität zu unterstellen. Beide Eigenschaften sollen der Relation insgesamt zukommen und nicht nur zwei ganz bestimmten Güterbündeln. Dies wird dadurch erreicht, dass man zwei beliebige Güterbündel $a = (a_1,\, a_2)$ und $b = (b_1,\, b_2)$ betrachtet, also beide Eigenschaften unabhängig von der Wahl der Güterbündel formuliert. Man erzielt die lückenlose Rangordnung mit minimalem Aufwand, wenn die starke Präferenz asymmetrisch und negiert transitiv ist.

Liegt nun eine solche Rangordnung vor, sowie Beschränkungen des Güterraumes von oben auf zulässige Güterbündel, dann lässt sich bereits angeben, was für den Konsumenten bestmöglich unter den gegebenen Beschränkungen ist.

Aus der starken Präferenz geht durch Negation die Definition für schwache Präferenz „mindestens so gut wie“ hervor. Ist beispielsweise a nicht besser als b, dann ist b mindestens so gut wie a. Die schwache Präferenz wird durch $\succsim$ abgekürzt. Die starke Präferenz in keiner der beiden Richtungen ergibt eine Definition für Indifferenz. Ist a nicht besser als b und ist auch b nicht besser als a, dann sind beide Güterbündel gleich gut. Die Indifferenz zwischen zwei Güterbündeln a und b wird mit $a \sim b$ abgekürzt; sie besagt, dass beide Güterbündel für den Konsumenten auf derselben Rangstufe stehen. Starke und schwache Präferenz sowie Indifferenz sind für die Nutzeneinstufung von Güterbündeln das, was die Größer ($>$) und Größer-Gleich ($\geq$), sowie die Gleichheit ($=$) für reelle Zahlen bedeuten und die Ähnlichkeit der gewählten Symbole $\succ$, $\succsim$ und $\sim$ soll gerade an die Verwandtschaft erinnern.

Die Nützlichkeit eines Güterbündels ist keine Zahl, sondern die Befriedigung, die der Konsument aus seinem Gebrauch zieht. Dennoch lassen sich den Güterbündeln Zahlen ihres Nützlichkeitsgrades zuordnen, so dass das stark präferierte von zwei Güterbündeln durch die größere Zahl von zwei verschiedenen Zahlen repräsentiert wird. Die numerische Darstellung der Rangordnung von Güterbündeln heißt Nutzenfunktion. Damit die Nutzenfunktion zu einem handhabbaren analytischen Werkzeug wird, soll sie stetig sein. Das be-

deutet aber, dass es beim Vergleich ähnlicher Güterbündel nicht zu abrupten Änderungen in der Rangordnung kommen darf. Die beiden bisher genannten Präferenz-Axiome schließen dies jedoch keineswegs aus, wie das Beispiel der lexikographischen Ordnung zeigt. Also muss die Stetigkeit der Rangordnung als eigenes Axiom postuliert werden.

Indifferenzkurven sind die Höhenlinien einer Nutzenfunktion oder der geometrische Ort aller Güterbündel, zwischen denen der Konsument indifferent ist. Sie sollen zwei Eigenschaften aufweisen. Erstens sollen sie um so höhere Nutzenniveaus repräsentieren, je weiter außen sie im Güterraum verlaufen — Nicht-Sättigung. Zweitens sollen sie streng konvexe Kurven sein.

Man unterscheidet insgesamt fünf Präferenz-Axiome, die im Folgenden näher zu erläutern sind:

1. Asymmetrie der starken Präferenz,
2. negierte Transitivität der starken Präferenz,
3. Stetigkeit der Rangordnung,
4. Nicht-Sättigung und
5. strenge Konvexität der Indifferenzkurven.

2.2.1 Asymmetrie der starken Präferenz

Die starke Präferenz ist asymmetrisch, wenn es im Güterraum keine Güterbündel a und b gibt, für die $a \succ b$ und $b \succ a$ gilt. Die Asymmetrie verhindert Arbitragegeschäfte mit derselben Person, wie das folgende Beispiel zeigt.

Betrachte zwei Personen A und B. Person A besitzt anfangs das Güterbündel a. Sie präferiert stark das im Besitz von B befindliche Güterbündel b; sie ist bereit im Austausch dafür ihr Güterbündel a plus 5 Euro zu geben. Die starke Präferenz soll aber nicht asymmetrisch sein, d.h. sie präferiert auch stark b gegenüber a. Die Person B kann nun ein Arbitragegeschäft durchführen. Zunächst gibt sie b und erhält dafür a plus 5 €. Dann schlägt sie vor, a zu geben und Person A wird einwilligen, da sie ja a stark gegenüber b präferiert. Am Ende ist Person B wieder im Besitz des anfänglichen Güterbündels b und um 5 euro reicher, Person A besitzt ebenfalls wieder ihr anfängliches Güterbündel a, ist aber um 5 Euro ärmer. Auf den ersten Blick wird sich kein vernüftiger Mensch auf diese Art von Geschäften einlassen.

Wird die Geschichte aber geringfügig ausgeschmückt, dann erscheint das Verhalten der Person A in völlig neuem Licht. Angenommen, die beiden Personen leben in Finnland, wo die Sommer heiß und die Winter kalt sind und

Güterbündel a ist ein Satz Sommerkleidung, während b ein Satz Winterkleidung ist. Die beiden Transaktionen schließlich mögen mal im Winter und mal im Sommer stattfinden.

2.2.2 Negierte Transitivität der starken Präferenz

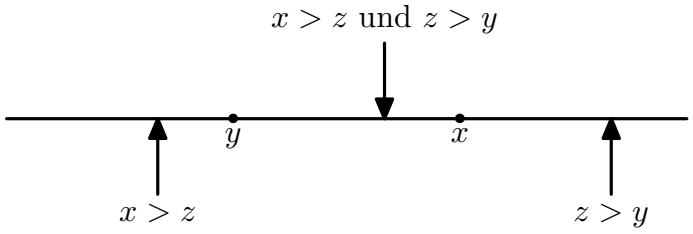
Die starke Präferenz $\succ$ ist negiert transitiv, wenn folgender Sachverhalt vorliegt: ist $a \succ b$, dann gilt für jedes dritte Güterbündel c, dass

- entweder a besser als c,
- oder c besser als b,
- oder c präferenzmäßig zwischen a und b liegt, also a besser als c und c besser als b ist.

Es gibt noch eine letzte Möglichkeit — weder $a \succ c$ noch $c \succ b$ — aber gerade diese wird durch das Axiom ausgeschlossen. Wenn der Konsument also für zwei Güterbündeln a und b bereits eine Einstufung vorgenommen hat, dann kann jedes weitere Güterbündel in die bereits bestehende Mini-Rangfolge eingeordnet werden.

Die Eigenschaft der negierten Transitivität wird am Beispiel der Größer-

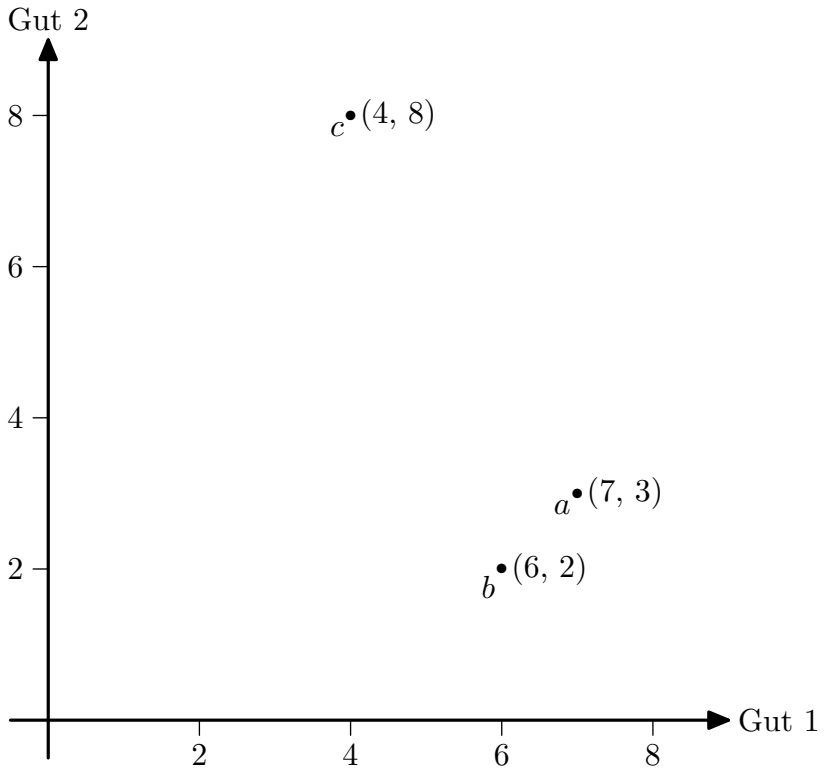
Abbildung 2.5: Negierte Transitivität bei reellen Zahlen



Beziehung zwischen reellen Zahlen auf der Zahlengeraden klar. Angenommen, für zwei reelle Zahlen x und y gilt $x > y$, dann liegt x rechts von y auf der Zahlengeraden. Eine weitere reelle Zahl z kann nun links von x, oder rechts von y oder zwischen x und y liegen (also links von x *und* rechts von y). Die Zahl z darf auch den Wert x oder von y annehmen, ohne dass sich an ihrer Einordnung etwas ändert.

Die negierte Transitivität der starken Präferenz erzwingt eine lückenlose Einordnung aller Güterbündel. Sie verhindert Situationen, in denen sich der Konsument nicht zu einer subjektiven Bewertung durchringen kann oder will.

Abbildung 2.6: Negierte Transitivität bei Güterbündeln



Die Problematik wird durch folgendes Beispiel erläutert. Angenommen, der Konsument hat bereits die Einstufung $a \succ b$ vorgenommen. Das Güterbündel a enthält, wie der Abbildung zu entnehmen ist, 7 Einheiten von Gut 1 und 3 Einheiten von Gut 2, also von jeder Gütersorte eine Einheit mehr als das Güterbündel b. Bei der Einstufung $a \succ b$ outet sich der Konsument als Nimmersatt. Nun soll er über Güterbündel c ein Urteil fällen, ob es besser als b ist oder ob Güterbündel a doch besser als c ist, oder ob gar beides zugleich zutrifft. Güterbündel c enthält mit 4 Einheiten von Gut 1 deutlich weniger dieser Sorte als die beiden anderen, dafür aber mit 8 Einheiten von Gut 2 entschieden mehr dieser Sorte als die beiden anderen Güterbündel. Spontan ist man versucht den Nutzenvergleich abzulehnen, also Güterbündel c als gar nicht bezüglich $\succ$ vergleichbar anzusehen, aber gerade diese Weigerung wird durch das Axiom der negierten Transitivität verboten. Man darf sich einem solchen Vergleich nicht entziehen.

2.2.3 Irreflexivität und Transitivität

Wenn die starke Präferenz die beiden Eigenschaften Asymmetrie und negierte Transitivität besitzt, dann ist sie auch irreflexiv und transitiv.

Die Eigenschaft der Irreflexivität folgt direkt aus der Asymmetrie, man hat statt des zweiten Güterbündels b nur wiederum a beim Vergleich zu setzen. Mit dieser Ersetzung lautet die Eigenschaft der Asymmetrie: es gibt im Güterraum keine Güterbündel a und a, für die $a \succ a$ und $a \succ a$ gilt. Die doppelt Nennung wird in folgender Formulierung vermieden: Es gibt im Güterraum kein Güterbündel a, für das $a \succ a$ gilt, was der Definition von Irreflexivität entspricht.

Angenommen, für drei Güterbündel a, b und c lautet die Bewertung $a \succ b$ und $b \succ c$. Aufgrund der negierten Transitivität folgen aus $a \succ b$ für das Güterbündel c drei Möglichkeiten:

1. entweder $a \succ c$,
2. oder $c \succ b$,
3. oder beides, also $a \succ c$ und $c \succ b$.

Die zweite Möglichkeit scheidet wegen der Asymmetrie aus. Die dritte Möglichkeit ist nur dann gegeben, wenn sowohl $a \succ c$ als auch $c \succ b$ wahr ist, der letzte Teil ist nach Voraussetzung falsch, folglich scheidet sie auch aus. Es bleibt nur noch $a \succ c$. Damit ist $\succ$ transitiv unter den getroffenen Annahmen, d.h.

$$a \succ b \quad \text{und} \quad b \succ c \quad \Longrightarrow \quad a \succ c$$

Mit dem Nachweis der Irreflexivität und Transitivität der starken Präferenz ist zugleich der Nachweis erbracht, dass der Güterraum bezüglich der starken Präferenz eine vollständig geordnete Menge ist. Der Konsument gibt beim Vergleich der Nützlichkeit zweier Güterbündel a und b genau eine von den drei Antworten $a \succ b$, oder $b \succ a$, oder $a \sim b$.

2.2.4 Indifferenz

Der Konsument ist zwischen den Güterbündeln a und b indifferent, wenn weder $a \succ b$ noch $b \succ a$ gilt. In diesem Fall wird $a \sim b$ geschrieben.

Die Indifferenz-Relation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, wenn die starke Präferenz asymmetrisch und negiert transitiv ist.

Die Reflexivität von $\sim$ resultiert aus der Irreflexivität von $\succ$. Letztere besagt, dass für alle Güterbündel a nicht $a \succ a$ gilt. Wenn aber für alle a

nicht $a \succ a$ gilt, dann gilt dies auch ein zweites Mal (wobei die beiden a's die Plätze tauschen), und somit folgt aus der Definition, dass der Konsument bei allen Güterbündel a zu einem identischen Güterbündel a indifferent ist $a \sim a$.

Die Symmetrie von $\sim$ ergibt sich direkt aus der Definition. Angenommen, der Konsument ist zwischen den beiden Güterbündeln a und b indifferent, $a \sim b$, dann gibt er keinem der beiden Güterbündel a und b den Vorzug, also nicht $a \succ b$ und nicht $b \succ a$, das ist aber gleichbedeutend mit nicht $b \succ a$ und nicht $a \succ b$, was definitionsgemäß $b \sim a$ bedeutet.

Auch die Transitivität von $\sim$ ergibt sich durch aussagenlogische Umformulierungen bereits bekannter Sachverhalte. Angenommen, der Konsument ist zwischen a und b und auch zwischen b und c indifferent. Er gibt erstens weder a noch b den Vorzug und er gibt zweitens weder b noch c den Vorzug, also gibt er insgesamt keinem der drei Güterbündel den Vorzug. Letzteres bedeutet aber insbesondere, dass er weder a noch c den Vorzug gibt, mithin ist er auch zwischen a und c indifferent.

2.2.5 Schwache Präferenz

Der Konsument präferiert schwach Güterbündel a vor b, wenn für ihn b nicht besser als a ist. Demnach ist für ihn das Güterbündel a besser als b oder er ist indifferent.

Für die schwache Präferenz lassen sich die Eigenschaften Vollständigkeit, Reflexivität und Transitivität nachweisen. Die Konstruktion einer lückenlosen Rangordnung im Güterraum ließe sich auch bewerkstelligen, indem man von der schwachen Präferenz oder auch der Indifferenz ausginge. Der hier gewählte Ausgangspunkt mit den Axiomen Asymmetrie und negierte Transitivität besitzt jedoch den Vorteil diese Axiome als Verhaltensmuster zu deuten und zu hinterfragen.

2.2.6 Zwischenergebnis

Eine lückenlose Präferenzordnung für Güterbündel benötigt als minimale Voraussetzung Asymmetrie und negierte Transitivität der starken Präferenz. Alles Weitere ergibt sich aus diesen beiden Axiomen als logische Konsequenz. Darf man aber die Logik heranziehen? Ja, denn wissenschaftliche Erkenntnis besteht gerade in der Anwendung der Logik, aus jenen Denkregeln, mit deren Hilfe aus bereits für wahr erachteten Aussagen weitere, für wahr erachtete Aussagen gewonnen werden.

Wenn die vergleichenden Wertschätzungen „besser als“ über Güterbündel, die ein Konsument äußert, asymmetrisch und negiert transitiv sind, dann

ergeben sich logisch zwingend folgende Schlussfolgerungen:

- diese Vergleiche, starke Präferenz genannt, sind auch
  - vollständig, d.h. sie erstrecken sich lückenlos über den ganzen Güterraum,
  - transitiv, d.h. sie sind konsistent,
  - irreflexiv, d.h. zwei identische Güterbündel gehören nicht dazu;
- es gibt ein vergleichendes Urteil „genauso gut wie“, Indifferenz genannt, welches besagt, dass von zwei Güterbündeln keines dem anderen vorgezogen wird, mit den Eigenschaften
  - Symmetrie, Reflexivität und Transitivität;
- es gibt ein drittes vergleichendes Urteil „a nicht besser als b“ oder gleichbedeutend mit „b besser oder gleich a“, schwache Präferenz genannt, mit den Eigenschaften
  - Vollständigkeit und Transitivität.

2.2.7 Konstruktion einer Nutzenfunktion

Werden alle zu einem bestimmten Güterbündel a indifferenten Güterbündel zu einer besonderen Teilmenge des Güterraumes zusammengefasst, entsteht die Indifferenzmenge zu a. Das Güterbündel a gehört dazu, ob es noch weitere, davon verschiedene Güterbündel in dieser Indifferenzmenge gibt, kann nicht gesagt werden, es ist jedoch hilfreich, sich diese Indifferenzmenge mit vielen Elementen vorzustellen. Wird die Indifferenzmenge eines anderen Güterbündels b betrachtet, dann sind die beiden Indifferenzmengen entweder elementefremd oder gleich. Wenn $a \succ b$ oder $b \succ a$, dann sind die beiden zugehörigen Indifferenzmengen elementefremd. Wenn $a \sim b$, sind die beiden Indifferenzmengen gleich. Insgesamt ergibt sich eine sogenannte Zerlegung des Güterraumes in Indifferenzmengen. Jedes Güterbündel gehört zu genau einer Indifferenzmenge und die Indifferenzmengen sind paarweise elementefremd.

Um die optische Unterscheidung verschiedener Indifferenzmengen im Güterraum zu erleichtern, könnten sie beispielsweise unterschiedlich gefärbt[2] werden. Eine andere Art sich einen Überblick zu verschaffen, besteht darin, die Indifferenzmengen buchstäblich aus dem Güterraum auszuschneiden,

[2]Da jedoch einer der Autoren farbenblind ist, sollen nur einige Indifferenzmengen schwarz gefärbt werden, alle übrigen bleiben unterschiedslos weiß.

die Schnippsel von ein und derselben Indifferenzmenge zusammenzukleben und die Stücke sortiert von ganz schlecht bis super gut erneut auszubreiten.[3] Der nächste, naheliegende Schritt besteht darin, die Stücke in aufsteigender Reihenfolge zu numerieren. Genau das macht eine Nutzenfunktion.

Eine Nutzenfunktion ordnet Güterbündeln Zahlen zu und zwar so, dass allen Bündeln einer Indifferenzmenge dieselbe Zahl zugeordnet wird und die Indifferenzmengen in aufsteigender Reihenfolge numeriert sind. Bezeichnet $U(a)$ die dem Güterbündel a zugeordnete Zahl (beispielsweise 4.23), dann gilt

$$a \sim b \Longleftrightarrow U(a) = U(b)$$
$$a \succ b \Longleftrightarrow U(a) > U(b)$$

Ob nun die Numerierung der Indifferenzmengen bei negativen[4] Zahlen anfängt oder nicht, spielt keine Rolle. Ebenso nebensächlich ist, welche zwei Zahlen zwei benachbarten Indifferenzmengen zugeordnet werden, Hauptsache, die „bessere“ Indifferenzmenge wird mit der größeren von zwei Zahlen numeriert — allerdings dürfen dann die übrigen reellen Zahlen, die zwischen diesen beiden liegen, nicht mehr für weitere Numerierungen herangezogen werden, denn sonst käme die Reihenfolge durcheinander. Die Beliebigkeit der Numerierung von Indifferenzmengen im Bezug auf die kleinste Zahl, mit der man beginnt und dem Abstand zwischen zwei Zahlen, die man zwei benachbarten Indifferenzmengen zuordnet, führt dazu, dass die resultierende Nutzenfunktion nicht eindeutig ist. Jede ordnungserhaltende Transformation der Zahlen liefert ebenfalls eine numerische Darstellung der Indifferenzmengen. Man bezeichnet diesen Sachverhalt mit „ordinale Nutzenfunktion“.

Ist U eine ordinale Nutzenfunktion (eine numerische Darstellung einer Präferenzordnung), dann ist auch die Verknüpfung (Verkettung) mit einer streng monoton zunehmenden Funktion V, also $V \circ U$, eine ordinale Nutzenfunktion derselben Präferenzordnung. Eine Präferenzordnung kann durch eine sehr große Anzahl ordinaler Nutzenfunktionen numerisch repräsentiert werden, wobei alle Nutzenfunktionen durch streng monoton zunehmende Transformationen auseinander hervorgehen.

[3] Diese Bastelanleitung ist vor allem für die haptisch veranlagten Studierenden gedacht und durchaus ernst gemeint. Man nehme ein Blatt Papier und schneide beliebige Teilmengen aus. Danach sollen die Teile sortiert ausgebreitet werden. Ergibt sich wieder das alte Blatt Papier?

[4] Im Lehrbuch von Schumann et al. S. 44 wird der Wertebereich von Nutzenfunktionen auf nicht-negative reelle Zahlen eingeschränkt. Dies ist jedoch nicht korrekt. Wie im gleichen Lehrbuch an anderer Stelle (S. 70 f.) betont wird, dürfen Nutzenfunktionen streng monoton zunehmend transformiert werden, ohne ihr Wesen zu verändern. Nun betrachte statt u mit nicht-negativem Wertebereich die verkettete Funktion $\ln(u)$. Auch dies ist eine Nutzenfunktion, aber eine, die nach unten unbeschränkt ist.

2.2.8 Stetigkeit der Präferenzordnung

Wenn man die Indifferenzmengen aus dem Güterraum ausschneidet, die zusammengehörenden Schnippsel derselben Indifferenzmengen zusammenklebt und anschließend die Flächenstücke nebeneinander sortiert ausbreitet, dann entsteht wiederum eine Fläche. In aller Regel wird sich diese Fläche vom ursprünglichen Güterraum unterscheiden.

Die Präferenzordnung ist stetig, wenn sich die Stücke der in aufsteigender Reihenfolge sortierten Indifferenzmengen *nahtlos* wieder zusammenfügen.

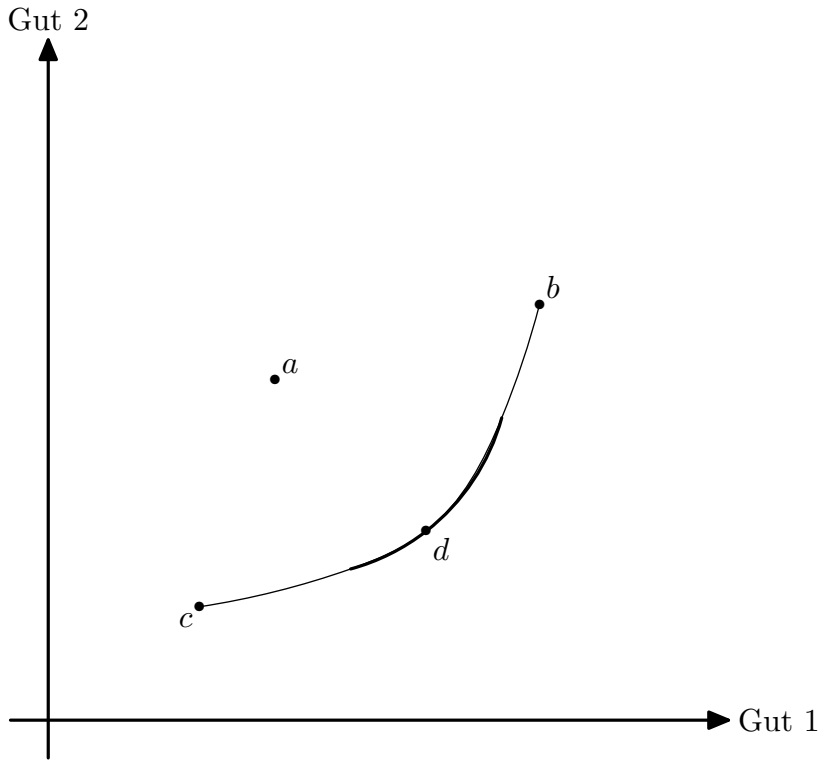
Wenn man beispielsweise den Güterraum gar nicht zerschneiden muss, um die Indifferenzmengen herauszulösen, wenn er aus einer einzigen Indifferenzmenge besteht, dann ist die betreffende Präferenzordnung stetig. In diesem Fall träfe der Konsument gar keine nutzenmäßige Unterscheidung zwischen Güterbündeln, sie wären für ihn allesamt gleich gut und für ihn gäbe es keine Knappheit. Diese indiskrete Präferenzordnung ist zwar stetig, aber für die Behandlung der ökonomischen Grundfragen ungeeignet. Im Vorgriff auf das Präferenz-Axiom der Nicht-Sättigung werden sie von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen.

Im entgegengesetzten Extremfall wird jeder Punkt des Güterraumes zu einer einpunktigen Indifferenzmenge. Die lexikographische Präferenzordnung ist dafür ein Beispiel. Solche Präferenzordnungen sind aber nicht stetig. Bevor jedoch die lexikographische Präferenzordnung dargestellt wird, ist es angebracht den Begriff der Stetigkeit einer Präferenzordnung im Güterraum selbst (also ohne vorheriges Zerlegen und Sortieren) zu erläutern.

Betrachte die Güterbündel a, b und c im Güterraum. Die Präferenzordnung des Konsumenten soll $b \succ a \succ c$ lauten. Verbinde die beiden Punkte b und c durch einen Pfad (eine Kurve), der nicht durch a verläuft. Auf diesem Pfad liegen Güterbündel, deren Zusammensetzung sich kontinuierlich verändert. Angenommen, man startet in Punkt b, einem Güterbündel, das der Konsument „besser als“ a beurteilt, und wandert entlang des Pfades zum Punkt c, einem Güterbündel, das der Konsument eindeutig „schlechter als“ a einstuft. Wie steht es aber mit den Bewertungen der Güterbündel, die man entlang des Pfades passierte, relativ zu a? Wenn die Präferenzordnung stetig ist, dann darf es entlang des Pfades nicht zu einer abrupten Änderung der Einstufung von „besser als“ zu „schlechter als“ kommen. Anders ausgedrückt: wenn die Präferenzordnung stetig ist, dann gibt es entlang des Pfades eine Zone mit Güterbündeln, oder wenigstens einen einzelnen Punkt mit Indifferenz bezüglich a.

In Abbildung 2.7 ist ein solches Güterbündel d auf dem Pfad als weiteres Element der Indifferenzmenge zu a eingezeichnet. Im Falle einer Zone der Indifferenz gibt es links und rechts von d noch weitere Güterbündel auf dem

Abbildung 2.7: Lokale Stetigkeit der Präferenzordnung



Pfad, die ebenfalls zur Indifferenzmenge bezüglich a gehören; dieses Segment des Pfades ist etwas fetter gezeichnet. Diese Art der Betrachtung entlang eines Pfades veranschaulicht die Stetigkeit der Präferenzordnung nur in einem eng begrenzten Ausschnitt des Güterraumes. Im mathematischen Sprachgebrauch handelt es sich dabei um eine lokale Betrachtung. Die Stetigkeit soll aber eine Eigenschaft sein, die dem System der Indifferenzmengen einer Präferenzordnung insgesamt zukommt. Das bedeutet, dass es bei Stetigkeit der Präferenzordnung an keiner Stelle des Güterraumes zu abrupten Änderungen der Einstufungen von Güterbündeln kommen darf.

Ist die Präferenzordnung stetig, dann ist auch jede ihrer numerischen Darstellungen eine stetige (Nutzen-) Funktion U vom Güterraum in die reellen Zahlen. Wenn x^1, x^2, ..., x^n... eine Folge von Güterbündeln mit dem Grenzwert x^∞ darstellt, dann ist bei Stetigkeit der Präferenzordnung die Folge der reellen Zahlen $U(x^1)$, $U(x^2)$, ..., $U(x^n)$, ... eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $U(x^\infty)$.

Die lexikalische Präferenzordnung ist ein Beispiel für unstetige Präferen-

zen bei einpunktigen Indifferenzmengen. Ihr Name entspringt der alphabetischen Sortierung der Begriffe in einem Lexikon. Bei alphabetischer Sortierung kommt es auf die Reihenfolge der Buchstaben in einem Wort an. Zuerst kommen alle Wörter, die mit dem Buchstaben A beginnen, darunter alle, deren zweiter Buchstabe auch ein a ist, gleichgültig wie lang das Wort ist und welche weiteren Buchstaben folgen etc. In ähnlicher Weise sind die Güterbündel bei einer lexikographischen Präferenzordnung sortiert. Statt Buchstaben werden die Güterquanta der Größe nach sortiert und zwar so, dass zuerst das Quantum der Gütersorte 1 zählt und darunter das von Gütersorte 2. Wenn der Konsument also zwei Güterbündel miteinander vergleicht, dann vergleicht er zuerst die Güterquanta der Sorte 1; sind sie verschieden, dann wird das Güterbündel mit dem größeren Quantum vor dem anderen stark präferiert, egal, ob und um wieviel sich die Quanta der zweiten Gütersorte unterscheiden. Sind die Quanta der ersten Sorte gleich, dann erst kommt der Größenvergleich bei der zweiten Gütersorte zum Tragen und das Güterbündel mit dem größeren Quantum der zweiten Gütersorte wird bevorzugt. Der Konsument ist somit niemals indifferent zwischen Güterbündeln mit unterschiedlicher Zusammensetzung und daher sind alle Indifferenzmengen einpunktige Mengen.

Mathematisch wird die lexikalische Präferenzordnung dargestellt durch folgenden Ausdruck, wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ zwei Güterbündel sind:

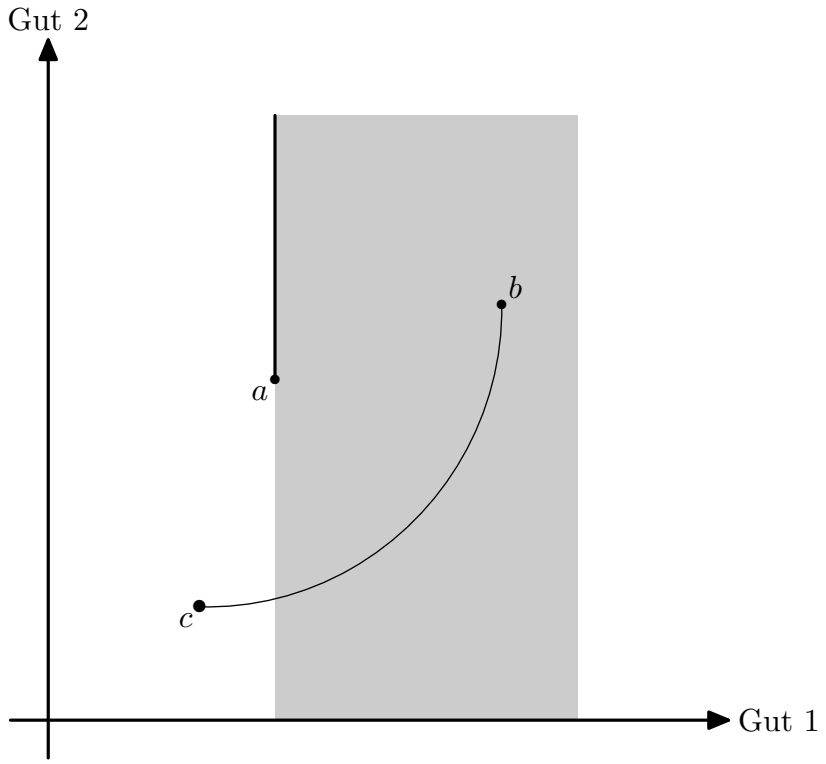
$$x \succ y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 > y_1 & \text{falls} \quad x_1 \neq y_1 \\ x_2 > y_2 & \text{falls} \quad x_1 = y_1 \end{cases}$$

Ein Beispiel aus dem Alltag, das zumindest als (lokale) Annäherung an eine lexikalische Präferenzordnung angesehen werden kann, ist eine Person, die unter Diabetes leidet. Wenn Sie nicht ihre tägliche Ration Insulin bekommt, fällt sie in ein Zucker-Koma. Daher steht das Medikament an erster Stelle, alles übrige (beispielsweise ein Pizzabecher aus der Eisdiele) ist nachrangig.

Um nun die Unstetigkeit der lexikalische Präferenzordnung graphisch zu veranschaulichen, ist es sinnvoll, die sogenannte Besser-Menge zu einem bestimmten Güterbündel zu betrachten. Die Indifferenzmenge zu einem Güterbündel besteht im Falle der lexikalischen Ordnung bekanntlich nur aus ihm alleine und damit sind beide optisch nicht zu unterscheiden. Die Besser-Menge eines Güterbündels a ist die Menge aller Güterbündel, die gegenüber a strikt präferiert werden. Die Besser-Menge von a stellt also die Gesamtheit aller akzeptablen Alternativen zu a dar.

Wiederum werden die drei Güterbündel a, b und c im Güterraum betrachtet. Das Güterbündel b liegt in der Besser-Menge von Güterbündel a und c liegt ausserhalb. Werden nun die nutzenmäßigen Einstufungen der Gü-

Abbildung 2.8: Besser-Menge einer lexikalischen Präferenzordnung



terbündel entlang des Pfades von b zu c jeweils relativ zu a betrachtet, dann sind alle Güterbündel im dunkel unterlegten Bereich, der Besser-Menge von a, besser als a und beim Übertritt in den weißen Bereich kommt es zu einer abrupten Änderung von „besser als a“ zu „schlechter als a“. Auf der Verbindungslinie gibt es kein Güterbündel, das zu a indifferent ist. Daher ist die lexikographische Präferenzordnung an der Stelle a unstetig. Es reicht bereits eine einzige Stelle aus, damit die ganze Präferenzordnung unstetig ist. Da jedoch das Güterbündel a beliebig aus dem Güterraum herausgegriffen wurde, ist die lexikographische Präferenzordnung überall unstetig.

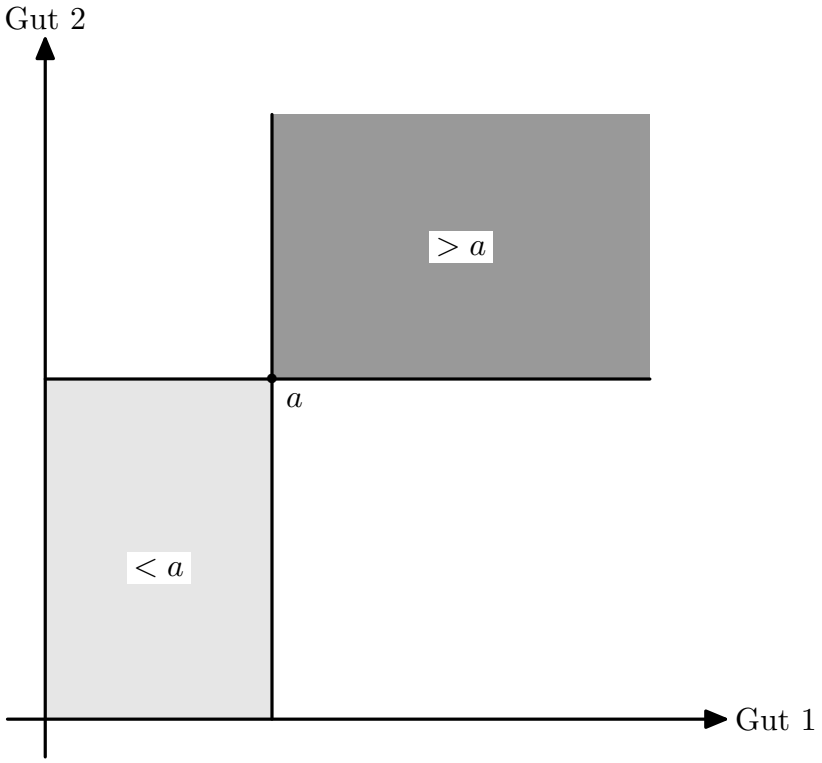
2.2.9 Nicht-Sättigung

Nicht-Sättigung ist eine Haltung des Konsumenten, wonach ihm ein „Mehr“ von etwas lieber ist als ein „Weniger“. Enthält eines von zwei Güterbündeln mehr von irgendeiner Gütersorte, dann wird es stark präferiert. Bei der lexikographischen Präferenzordnung war das anders. Dort kam es zuerst auf die

erste Gütersorte an, egal wieviel die Bündel von der zweiten Sorte enthalten und erst wenn von der ersten Sorte dasselbe Quantum vorliegt, wurde das Quantum der zweiten Sorte zum Vergleich herangezogen.

Ist ein Güterbündel a größer als ein Güterbündel b, abgekürzt durch $a > b$, dann ist $a_1 \geqq b_1$ und $a_2 \geqq b_2$ und mindestens eine der beiden letzten Ungleichungen ist strikt erfüllt, d.h. $a_i > b_i$ für wenigstens ein $i = 1, 2$. Im

Abbildung 2.9: Größer- und Kleiner-Menge eines Güterbündels



Güterraum liegen alle Güterbündel, die größer als ein Güterbündel a sind, rechts oberhalb des Punktes a. Alle Güterbündel, die kleiner als a sind, liegen links unterhalb davon. Die Größer-Menge ist dunkel und die Kleiner-Menge hell unterlegt. Es gibt Paare von Güterbündeln, bei denen weder das eine größer als das andere, noch das andere größer als das eine ist. Diese Bereiche liegen links oberhalb und rechts unterhalb von Güterbündel a und sind weiße Flecken, was die quantitative Vergleichbarkeit anbelangt. Das Beispiel zur negierten Transitivität ist auch so ein Fall: Güterbündel $c = (4, 8)$ ist weder größer noch kleiner als Güterbündel $a = (7, 3)$. Gerade in der quantitativen Unvergleichbarkeit der Güterbündel besteht der innere Konflikt, und die

negierte Transitivität verlangt, dass sich der Konsument trotz dieser quantitativen Unvergleichbarkeit zu einer Einstufung durchringt.

Das Axiom der Nicht-Sättigung ist im Rahmen der schlichten Zwei-Güterwelt überhaupt nicht einsichtig. Jedem kommen sofort Gegenbeispiele in den Sinn, wie „das erste Bier nach Feierabend schmeckt prima, das zweite vielleicht auch noch, aber das sechste oder siebte ist von Übel“. Weiter werden dann solche Beispiele herangezogen, um die ganz zu Anfang formulierte These von der generellen Knappheit — der unaufhebbaren Diskrepanz — zu bezweifeln.

Angenommen, wir betrachten ein Güterbündel, das aus der CD „stompede“ von The Busters[5] und einer Brille besteht. Es ist absurd zu unterstellen, dass ein Güterbündel mit zwei CD's „stompede“ und einer Brille besser ist, als das mit nur einer CD. Auch der Vergleich mit einer verdoppelten Brille ist absurd. Die Nicht-Sättigung bezieht sich aber nicht nur auf Fülle, sondern auch auf Vielfalt — variatio delectat, wie der Lateiner zu sagen pflegt. Wenn also zwei CD's mit ganz unterschiedlicher Musik statt zwei identische CD's ins Spiel kommen, dann macht der Vergleich wieder Sinn. Aber nicht nur Vielfalt, sondern auch gesteigerte Qualität eines Gebrauchsgegenstandes ist zu bedenken, wofür die Brille das Muster abgibt. Wenn nun im Güterbündel die Brille mit normalen Gläsern durch eine mit leichteren Kunststoffgläsern ausgewechselt wird und diese durch Kontaktlinsen, dann wird jedesmal eine höhere Einstufung der Nützlichkeit nachvollziehbar. So wird in den Wirtschaftswissenschaften recht häufig argumentiert: statt neue Gütersorten zu unterscheiden, wird so getan, *als ob* die neuen Gütersorten größere Quanta einer bestimmten Sorte seien.

Wird beim Vergleich von Güterbündeln der zeitliche Aspekt in angemessener Weise bedacht, dann gewinnt die Nicht-Sättigung auch dadurch einen Sinn. Angenommen, der Konsument gebraucht ein Güterbündel schon eine gewisse Zeit, sodass er sich an dieses Versorgungsniveau gewöhnt hat. Wenn er nun vor dem Hintergrund dieser Gewohnheit größere Güterbündel einschätzen soll, wird er sie vermutlich seinem gegenwärtigen Versorgungsniveau vorziehen. Unabhängig von moralischen Wertungen ist es durchaus einsichtig, dass die Befriedigung von Bedürfnissen immer wieder auch neue Bedürfnisse schafft. Die Nicht-Sättigung ist daher auch zu interpretieren als ein zeitloser Gesamtüberblick über die Pfadabhängigkeit der menschlichen Existenz, die den gegenwärtigen Zustand immer als Mangel empfindet.

Wird Nicht-Sättigung der Präferenzordnung unterstellt, dann hat dies dramatische Rückwirkungen auf die Nutzenfunktion und die Gestalt der Indifferenzmengen. Werden die Indifferenzmengen aus dem Güterraum ausge-

[5]Einer der Autoren mag nun mal diese Musik.

schnitten, die zusammengehörenden Schnippsel derselben Indifferenzmenge beliebig zusammengeklebt und anschließend die Flächenstücke nebeneinander sortiert ausgebreitet, dann entsteht bei einer Präferenzordnung, die die Eigenschaft Nicht-Sättigung aufweist, wieder der alte Güterraum.

Nicht-Sättigung ist also eine besondere Eigenschaft der Präferenzordnung, die die Punkte des Güterraumes *trotz Umordnung durch Sortieren* an ihrem alten Platz belässt.

Jede numerische Darstellung einer Präferenzordnung mit der Eigenschaft der Nicht-Sättigung ist streng monoton zunehmend: ist Güterbündel a größer als b, dann wird a stark gegenüber b präferiert und somit ist auch das Nutzenmaß bei a größer als bei b:

$$a > b \quad \Longrightarrow \quad a \succ b \quad \Longleftrightarrow \quad U(a) > U(b)$$

Die Indifferenzmengen einer Präferenzordnung, die durch Nicht-Sättigung gekennzeichnet ist, besitzen drei besondere Eigenschaften.

1. Wird nach der Indifferenzmenge eines Güterbündels a gefragt, dann kann diese nur solche Güterbündel enthalten, die im Güterraum links oberhalb oder auch rechts unterhalb von a zu liegen kommen. Dies sind gerade die weißen Flecken in Abbildung 2.9. Die Indifferenzmenge eines Güterbündels a kann sich also nur von Nord-Westen nach Süd-Osten hin ausbreiten.

2. Legt man durch einen solchen weißen Bereich eine Strecke von Rand zu Rand(also mit positiver Steigung), dann kann es auf dieser Verbindungslinie zwischen der Besser- und der Schlechter-Menge von Güterbündel a höchstens ein Güterbündel liegen, bei dem Indifferenz mit a herrscht. Stetigkeit ist dagegen die Eigenschaft, wonach auf diesen Verbindunglinien mindestens ein Punkt der Indifferenz vorkommt. Die Indifferenzmenge zu einem Güterbündel a ist somit flach — eben höchstens einen Punkt dick, wenn sie in einer positiven Richtung durchlaufen wird.

3. Die Indifferenzmenge eines Güterbündels a liegt rechts oberhalb der eines kleineren Güterbündels b. Je weiter außen eine Indifferenzmenge liegt, desto höher ist die Nutzeneinstufung dieser Güterbündel (die der Konsument ja untereinander alle als gleich gut klassifiziert).

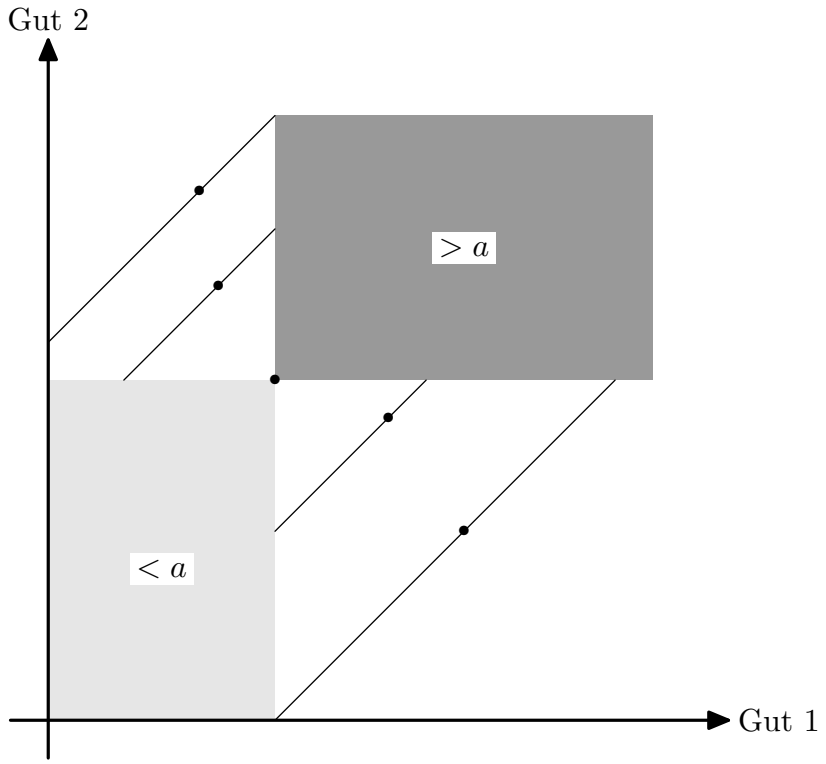
Die ersten beiden Eigenschaften beziehen sich auf die Form einer einzelnen Indifferenzmenge, die dritte auf die Lage der Indifferenzmengen zueinander.

2.2.10 Konstruktion einer Indifferenzkurve

Erfüllt die Präferenzordnung eines Konsumenten die Eigenschaften Asymmetrie, negierte Transitivität, Stetigkeit und Nicht-Sättigung, dann weisen die Indifferenzmengen ganz besondere geometrische Eigenschaften auf: sie sind (glatte) Kurven im Güterraum. Die Präferenz-Axiome Asymmetrie und negierte Transitivität sorgen dafür, dass der Güterraum in paarweise elementefremde Indifferenzmengen zerlegbar ist, Stetigkeit und Nicht-Sättigung sind dafür verantwortlich, dass es auf jeder Verbindungsstrecke von der Besser- zur Schlechter-Menge eines beliebigen Güterbündels genau ein Güterbündel mit Indifferenz gibt.

Betrachte ein Güterbündel a, der dunkel unterlegte Bereich bezeichnet al-

Abbildung 2.10: Punktweise Konstruktion einer Indifferenzkurve

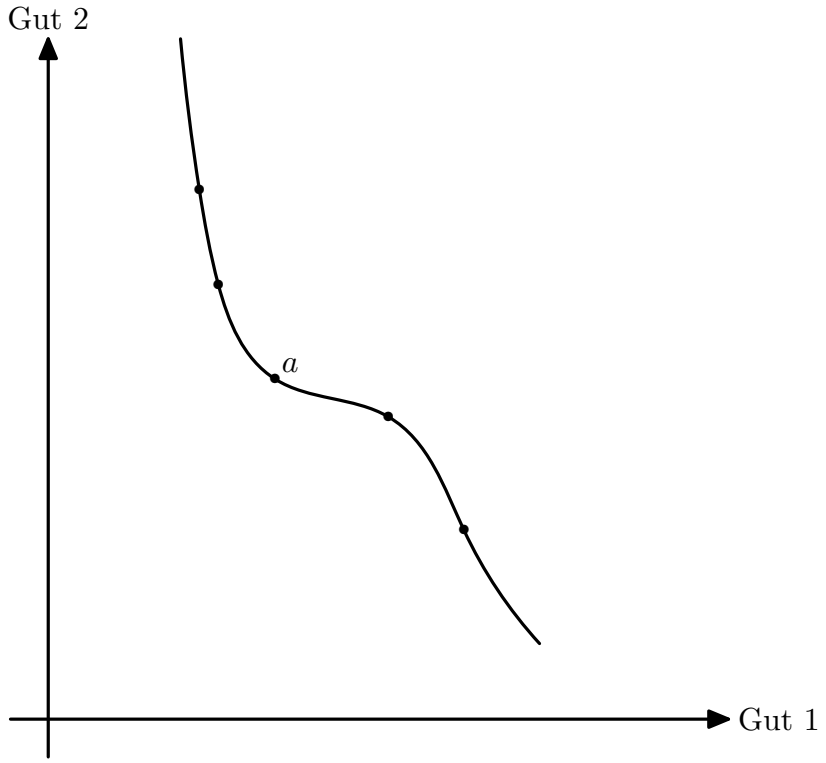


le Güterbündel, die größer als a sind, er gehört somit zur Besser-Menge von a und der hell unterlegte Bereich bezeichnet alle Güterbündel, die kleiner als a sind, er gehört somit zur Schlechter-Menge von a. Jede Verbindungsstrecke vom Rand des dunkel unterlegten Bereiches zum Rand des hell unterlegten Bereiches durch den weißen Bereich verbindet somit Güterbündel, die der

Konsument am Anfang besser einstuft und am Ende schlechter. Daher muss es auf jeder dieser Verbindungsstrecken genau ein Güterbündel mit Indifferenz zu a geben.

Lässt man nun alle Verbindungslinien weg und zeichnet nur alle Güterbündel, bei denen der Konsument indifferent ist, entsteht eine fallende Indifferenzkurve. Die Indifferenzkurve ist an keiner Stelle dick, wegen der Nicht-

Abbildung 2.11: Fallende Indifferenzkurve

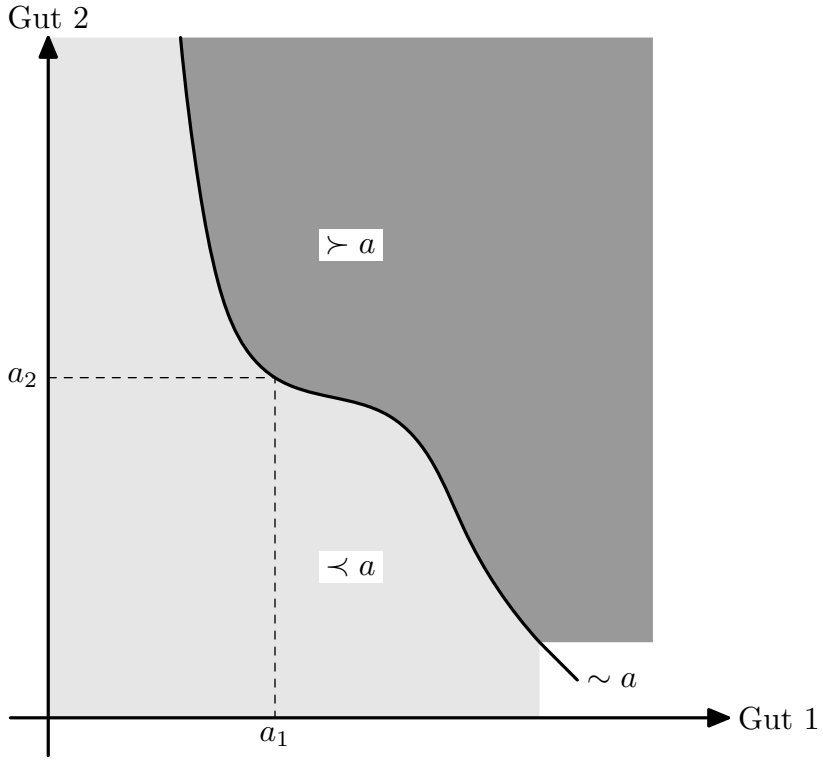


Sättigung. Sie ist auch nirgends unterbrochen, aufgrund der Stetigkeit. Die Indifferenzkurve muss auch einen fallenden Verlauf aufweisen: wenn der Konsument auf einen Teil des Gutes 2 verzichten soll, dann muss er durch ein zusätzliches Quantum des Gutes 1 entschädigt werden, damit er indifferent zwischen den Güterbündeln ist, deren Zusammensetzung variiert.

Die Indifferenzkurven besitzen auch alle Eigenschaften, die bereits bei den Indifferenzmengen festgestellt wurden. Sie schneiden sich nicht, denn sie sind paarweise elementefremd. Durch jeden Punkt des Güterraumes läuft genau eine Indifferenzkurve, denn der Güterraum wird vollständig durch das System der Indifferenzkurven zerlegt.

Die Indifferenzkurve eines Güterbündels a teilt den Güterraum in genau drei Teile auf.

Abbildung 2.12: Dreiteilung des Güterraumes durch eine Indifferenzkurve



1. Im Bereich oberhalb der Indifferenzkurve befinden sich alle Güterbündel, die der Konsument besser als a einstuft. Dies ist die Menge aller akzeptablen Alternativen zu a oder kurz die Besser-Menge von a.

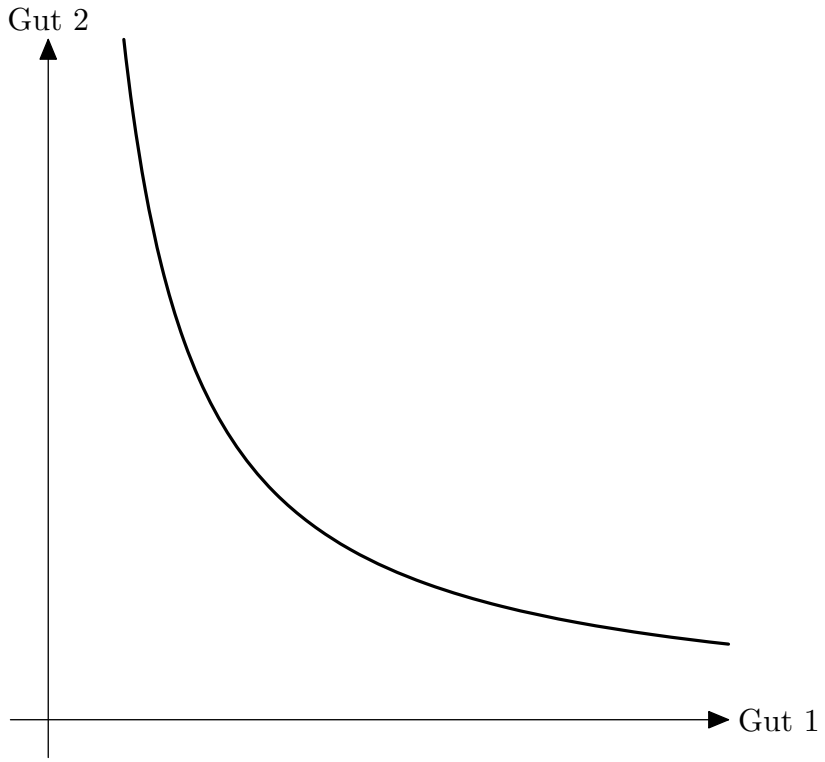
2. Im Bereich unterhalb der Indifferenzkurve befinden sich alle Güterbündel, die der Konsument schlechter als a einstuft. Keines dieser Güterbündel kommt als Alternative zu a in Betracht, es ist die Schlechter-Menge.

3. Auf der Indifferenzkurve selbst befinden sich alle Güterbündel, die der Konsument genauso gut wie a einstuft. Dies ist der — hauchdünne und lückenlose — Grenzbereich zwischen Besser- und Schlechter-Menge von a.

2.2.11 Strenge Konvexität der Indifferenzkurven

Das letzte Präferenz-Axiom — strenge Konvexität der Indifferenzkurven — kann nur dann aufgestellt werden, wenn zuvor die anderen vier Axiome postuliert wurden, wenn also sichergestellt ist, dass der Güterraum von Indifferenz*kurven* überdeckt wird. Es unterstellt dass alle Indifferenzkurven zum Ursprung hin gekrümmt sind.

Abbildung 2.13: Streng konvexe Indifferenzkurve



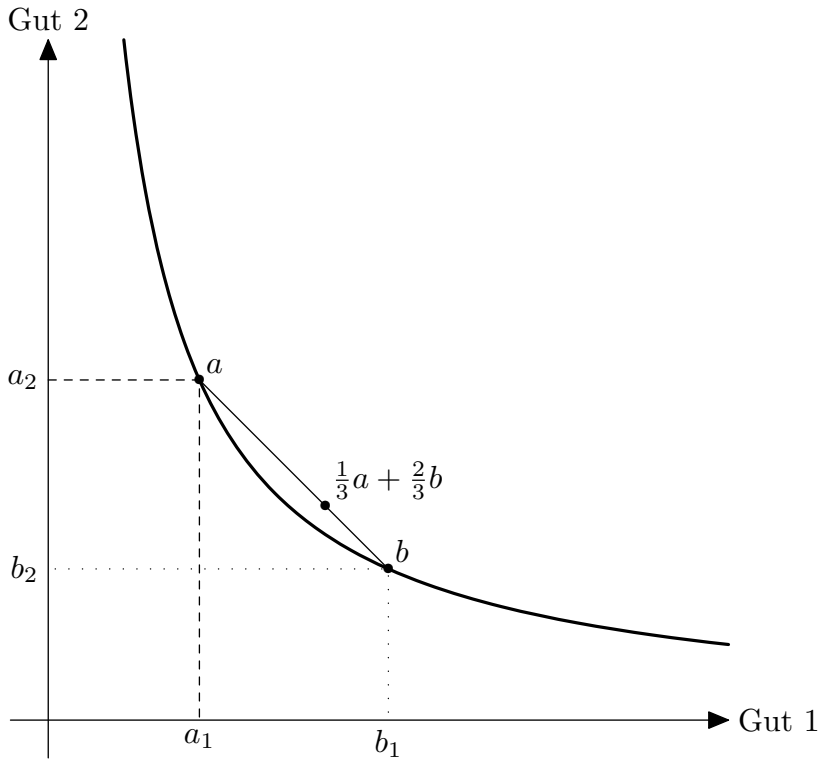
Die strenge Konvexität der Indifferenzkurven ist eine ausgesprochen facettenreiche Eigenschaft. Sie kann auf drei verschiedene Arten mathematisch gekennzeichnet und ökonomisch interpretiert werden:

1. Sekanten verlaufen immer über dem Kurvenbogen.
2. Tangenten verlaufen immer unterhalb der Indifferenzkurve.
3. Die zweite Ableitung der Indifferenzkurve ist positiv.

2.2.11.1 Sekanten verlaufen immer in der Besser-Menge

Streng konvexe Indifferenzkurven sind solche, bei denen beliebige Sekanten ausschließlich durch die Besser-Menge verlaufen, mit Ausnahme der beiden

Abbildung 2.14: Sekante einer streng konvexen Indifferenzkurve



verschiedenen Endpunkte:

$$a \neq b,\ a \sim b \Longrightarrow \lambda a + (1-\lambda)b \succ a \quad \text{für} \quad 0 < \lambda < 1$$

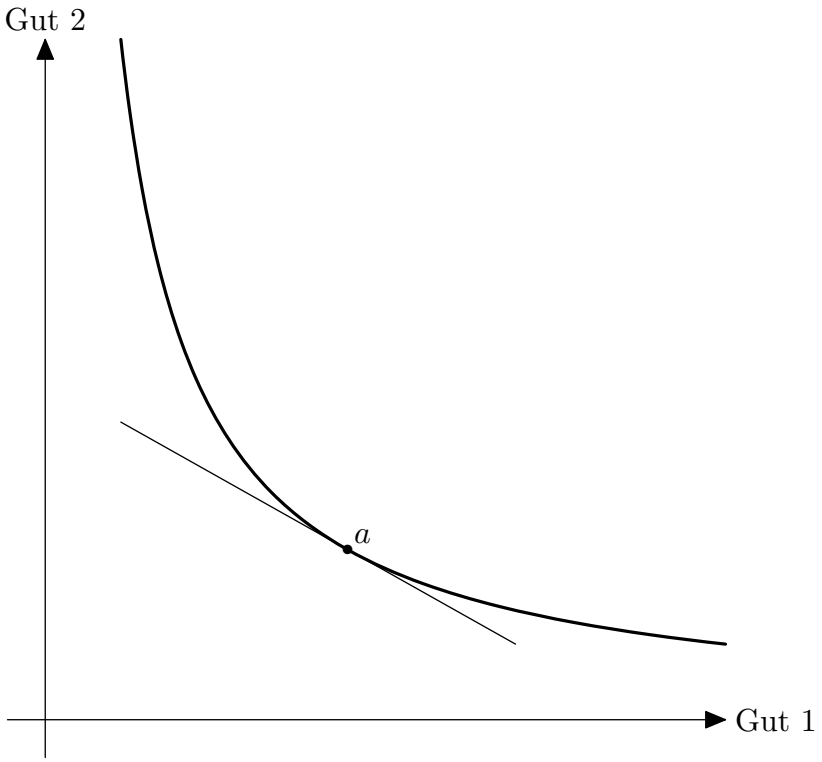
Bei dieser Interpretation wird unterstellt, dass der Konsument eine ausgewogene Mischung von Güterbündeln denen bevorzugt, die der Mischung zugrundeliegen und zwischen denen er indifferent ist.

Angenommen, der Konsument ist zwischen den Güterbündeln a und b indifferent, dann bevorzugt er Güterbündel, die als Mischung — als Konvexkombination — aus a und b hervorgehen, beispielsweise jenes, das ein Drittel zu zwei Drittel aus a und b gemischt ist.

2.2.11.2 Tangenten verlaufen immer in der Schlechter-Menge

Jede beliebige Tangente an eine streng konvexe Indifferenzkurve verläuft — mit Ausnahme des Tangentialpunktes — immer unterhalb der Kurve, also durch die Schlechter-Menge des Tangentialpunktes. Ist das Güterbündel a der Tangentialpunkt, dann wird er gegenüber allen anderen Güterbündeln auf der Tangente präferiert. Wenn der Konsument also die Wahl hat, sich für

Abbildung 2.15: Tangente einer streng konvexen Indifferenzkurve



eines der Güterbündel auf einer Geraden zu entscheiden, dann wird er sich unweigerlich für den Tangentialpunkt mit einer Indifferenzkurve entscheiden, denn dieses bietet ihm den höchsten Nutzen unter den gegebenen Umständen.

Wird umgekehrt einem Konsumenten mit einem Güterbündel a vorgeschlagen, sein Güterbündel in tangentialer Richtung[6] umzuschichten, dann wird er den Handel ablehnen und zwar unabhängig vom Ausmaß der Umschichtung. Bei jeder anderen Richtung wird er bereit sein, sein Güterbündel

[6]Im nächsten Unterabschnitt, dem mathematischen Exkurs zur Grenzrate der Substitution wird ausführlich erörtert, was darunter zu verstehen ist.

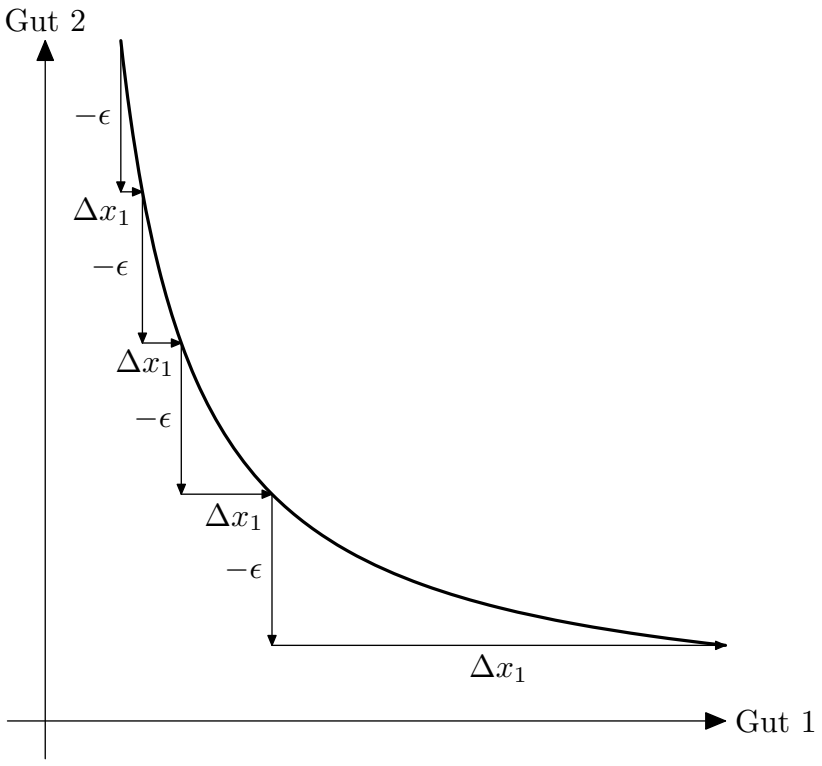
umzuschichten, denn es gibt immer die Option in die Besser-Menge von a zu gelangen.

2.2.11.3 Die zweite Ableitung ist positiv

Dem streng konvexen Verlauf von Indifferenzkurven liegt auch die Vorstellung zugrunde, dass eine Gütersorte, die sehr reichlich in einem Güterbündel vertreten ist, sich gut zum Ersatz der anderen, relativ knapp bemessenen Gütersorte eignet. Umgekehrt kann eine Gütersorte, die mit einem bereits geringen Anteil am Güterbündel vertreten ist, nur durch sehr großen Aufwand der anderen Sorte weiter verkleinert werden.

Angenommen, der Konsument wandert im Geiste entlang einer streng konvexen Indifferenzkurve von links oben nach rechts unten. Er verzichtet schrittweise jeweils auf ein bestimmtes Quantum $\Delta x_2 = -\epsilon$ von Gut 2 und fragt sich, wieviel von der Sorte 1 er jedesmal zusätzlich benötigt, um sich

Abbildung 2.16: Wanderung entlang einer Indifferenzkurve



nutzenmäßig wieder gleich zu stellen. Die Schrittweite ϵ ist eine beliebig wählbare positive reelle Zahl. Im ersten Schritt wird er recht wenig von Sorte 1

benötigen, um sich für die durch Δx_2 ausgelöste Nutzeneinbuße zu entschädigen, da das Güterbündel am Start überwiegend das Gut 2 enthält. Im zweiten Schritt benötigt er aber schon mehr von Gut 1. Wenn schließlich nach vielen kleinen Reduktionen und kompensierendem Aufstocken durch Gut 1 verhältnismäßig wenig von Gut 2 verblieben ist, wird dieser relativ geringe Anteil nur noch durch sehr große Kompensationen von Gut 1 weiter zu verringern sein. Bei Wanderungen entlang einer konvexen Indifferenzkurve mit gleichschrittigen Verringerungen von Gut 2 in Höhe von ϵ wird Δx_1 immer größer.

Die Rate

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\text{Verzicht}}{\text{Kompensation}}$$

mit der Gut 2 durch Gut 1 bei der Wanderung entlang der Indifferenzkurve ersetzt wird, heißt Substitutionsrate. Sie ist eine negative, dimensionsbehaftete Verhältnis-Zahl. Die Dimension der Substitutionsrate ist [Gut 2]/[Gut 1]. Deshalb kann sie genauer als die Substitutionsrate des Gutes 2 *durch* Gut 1 bezeichnet werden.

Bei der Wanderung entlang einer streng konvexen Indifferenzkurve mit gleichschrittigen Verringerungen von Gut 2 wird der Nenner der Substitutionsrate immer größer, folglich wird der Bruch unter Beachtung des negativen Zählers ebenfalls immer größer, der absolute Betrag hingegen wird immer kleiner. Wenn der Konsument von rechts unten nach links oben entlang einer streng konvexen Indifferenzkurve wandert, dabei das Quantum von Gut 1 gleichschrittig vermindert, dann bleibt das Prinzip unverändert. Je geringer der Anteil eines Gutes im Güterbündel, desto mehr muss vom anderen Gut hinzugefügt werden, um die Nutzeneinbuße zu kompensieren, die durch seine schrittweise Verminderung eintritt.

Die Grenzrate der Substitution (GRS) wird definiert als Grenzwert der Substitutionsrate

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

und die Veränderung des absoluten Betrages der GRS, die aus einer Wanderung entlang einer streng konvexen Indifferenzkurve resultiert, wird das „Gesetz der sinkenden Grenzrate der Substitution“ genannt.

Die einschlägigen Lehrbücher zur Mikroökonomik machen zur GRS recht unterschiedliche Aussagen. Im Lehrbuch von Schumann et al. (1999, S. 48) wird die Grenzrate der Substitution als absoluter Betrag eines Differentialquotienten definiert, das Lehrbuch von Herberg (1985, S.78) enthält in der Definition gleich zwei grobe Fehler — statt Substitutionsrate von Gut 2 durch Gut 1 wird sinngemäß von Gut 1 durch Gut 2 gesprochen und die partiellen

Ableitungssymbole ∂ sind völlig irreführend — und das Lehrbuch von Moritz (1993) gar stilisiert die Grenzrate der Substitution zum Kern der mikroökonomischen Haushaltstheorie. Im Standardlehrbuch des Fachbereichs, Varian (1999, S. 46) ist zu lesen „Es ist immer etwas verwirrend, dass die Grenzrate der Substitution eine *negative* Zahl ist.“, in der dazugehörigen Abbildung hingegen ist der Quotient mit -1 multipliziert.

2.3 Exkurs: Mathematische Betrachtung der GRS

Die dreifache mathematische Charakterisierung einer streng konvexen Indifferenzkurve basiert darauf, wie sich eine Gerade zu einer gekrümmten Kurve verhält. Eine Gerade kann ihrerseits durch eine lineare Gleichung, die Zwei-Punkte-Form, die Punkt-Richtungs-Form und durch die Normal-Form dargestellt werden. Darüber hinaus können die gekrümmte und die lineare Kurve unter analytischen und unter geometrischen Aspekten betrachtet werden. Diese Vielschichtigkeit mag eine Ursache für die diversen und „verwirrend“en Darstellungen in den Lehrbüchern sein. In diesem Unterabschnitt wird der Versuch unternommen, die Vielschichtigkeit dadurch übersichtlich zu machen, indem die unterschiedlichen Aspekte nacheinander und detailliert vorgeführt und miteinander verglichen werden.

2.3.1 Punkt-Richtungs-Form einer Geraden

Die Sekante, die an eine Indifferenzkurve angelegt ist, kann als Strecke auf einer Geraden angesehen werden. Die Gerade ℓ ist dabei durch die Zwei-Punkte-Form ihrer Schnittpunkte mit der Indifferenzkurve festgelegt. Für das Verständnis (nicht nur) der Wanderung entlang einer Indifferenzkurve ist jedoch die Punkt-Richtungs-Form einer Geraden von ausschlaggebender Bedeutung. Deshalb soll anhand der Wanderung entlang einer Indifferenzkurve eine präzise Vorstellung davon vermittelt werden, dass Umschichtungen von Güterbündeln als Vektoren im Güterraum aufzufassen sind, die einen bestimmten Anfang, eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Länge haben.

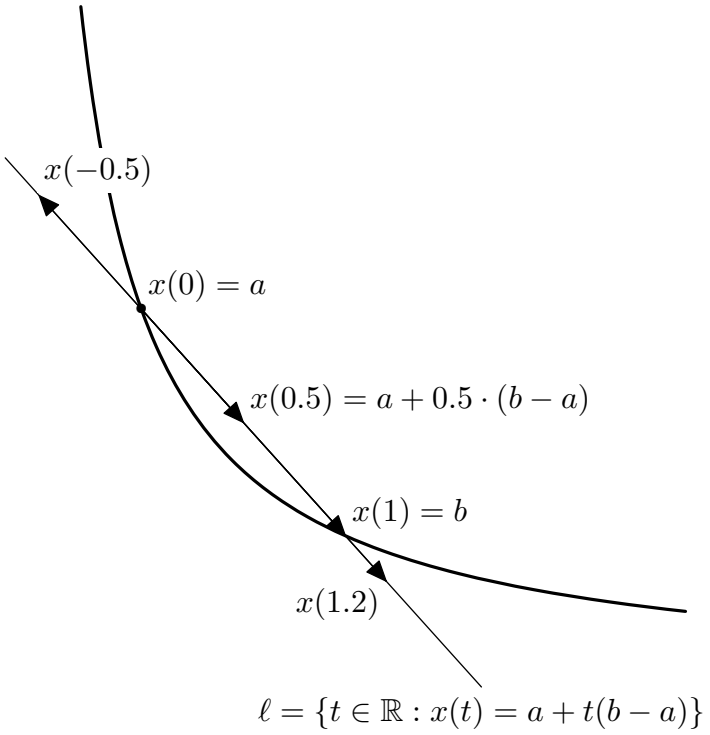
Betrachtet man die Wanderung von einem Güterbündel a zu einem anderen Güterbündel b auf der Indifferenzkurve (der Indifferenzmenge) von a, dann liegt die Sekante auf einer Geraden ℓ, und die Wanderung findet auf der Geraden von Punkt a in Richtung $b-a$ statt. Jeder Punkt x auf der Geraden wird folgendermaßen angesprochen: Gehe von a aus t mal in Richtung $b-a$.

Die sogenannte Punkt-Richtungs-Form der Geraden lautet:

$$x(t) = a + t(b - a)$$

Ist $t = 0$, findet gar keine Wanderung statt. Ist $t = 1$, befindet man sich im

Abbildung 2.17: Sekante als Strecke auf einer Geraden



Punkt b. Ist $t < 0$, so geht man in eine Richtung, in der gar keine zu a indifferenten Güterbündel mehr liegen. Ist $t > 1$, schießt man übers Ziel hinaus, und für $0 < t < 1$ befindet man sich in der Besser-Menge von a. Die Vektoren $a + t(b - a)$ beginnen alle im Punkt a, was durch $\bullet$ gekennzeichnet ist, ihr Ende ist durch eine Pfeilspitze gekennzeichnet. In Abbildung 2.17 wurde bewusst auf die Koordinaten-Achsen verzichtet, denn deren Pfeilspitzen sollen andeuten, dass sich die Achse noch weiter in diese Richtung erstreckt statt den Endpunkt eines Vektors zu markieren. Im Folgenden sind bei allen Abbildungen, welche Vektoren enthalten, die Achsen-Pfeile weggelassen.

Der Vektor $b - a$ gibt also nur die Richtung an, in der Güterbündel a umzuschichten ist, nicht jedoch das Ausmaß. Nur bei $t = 1$ endet der Schritt in einem Güterbündel, bei welchem Indifferenz zum Ausgangspunkt gilt. Die

Punkt-Richtungs-Form zerlegt die Umschichtung in einen Anfangspunkt a, eine Richtung $b - a$, und eine Länge $t(b - a)$.

Keine Angst, die Gerade $\ell = \{t \in \mathbb{R} : x(t) = a + t(b - a)\}$ ist die alte wohlbekannte Gerade aus der Schulzeit. Man braucht nur den Parameter t zu eliminieren:

$$\begin{aligned} x_1 = a_1 + t(b_1 - a_1) \quad &\rightsquigarrow \quad t = \frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} \\ x_2 = a_2 + t(b_2 - a_2) \quad &\rightsquigarrow \quad t = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} \\ &\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2} \end{aligned}$$

und es stellt sich die gute alte Zwei-Punkte-Form der Geraden wieder ein. Allerdings darf dabei weder $b_1 = a_1$ noch $b_2 = a_2$ vorkommen. Die Punkt-Richtungs-Form der Geraden hat offensichlich zwei Vorteile gegenüber den in der Schule behandelten Formen: Erstens sind auch senkrechte oder waagerechte Geraden damit problemlos zu beschreiben und zweitens besitzt die Punkt-Richtungs-Form eine besondere Interpretation in der Mikroökonomik.

Der Richtungs-Vektor $b - a$ gibt die Richtung an, in welcher das Güterbündel a umgeschichtet wird. Es ist ein Zwei-Tupel, der im Falle der Sekante an die Indifferenzkurve genau eine negative und eine positive Zahl enthält. Als Zahlenpaar unterscheidet er sich damit überhaupt nicht von einem Güterbündel, das auch ein Zahlenpaar ist. Aber der Richtungsvektor enthält eine negative Zahl, und damit ist er keineswegs als Punkt im Güterraum zu interpretieren. Die Mathematiker brauchen zwischen Punkten und Vektoren nicht genau zu unterscheiden, die Wirtschaftswissenschaftler aber sehr wohl, denn negative Quanta kann es in einem Güterbündel nicht geben. Der Begriff der Richtung lässt sich auf höherdimensionale Güterräume übertragen, die Anschauung einer steigenden oder fallenden Geraden hingegen nicht.

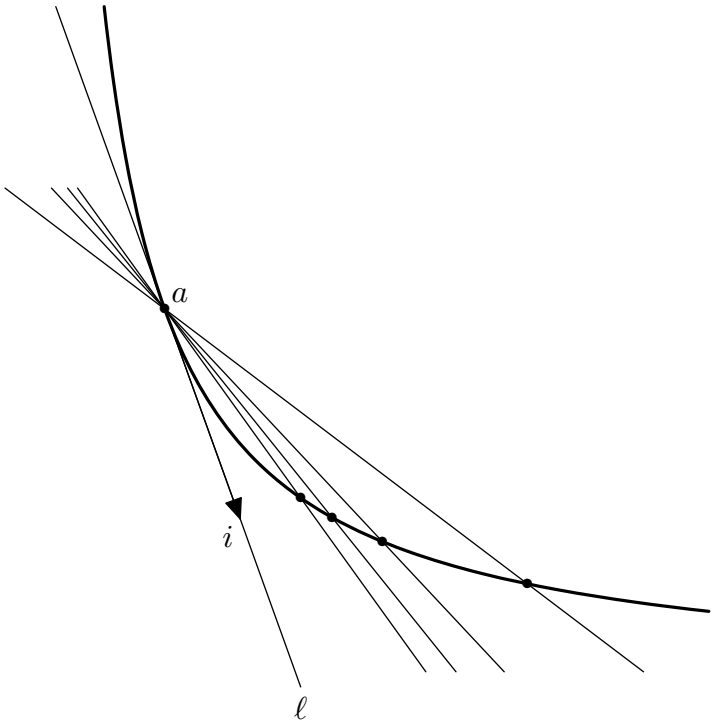
2.3.2 Indifferenz-Richtung

Angenommen, man erlaubt dem Konsumenten von Punkt a aus in Richtung $b - a$ umzuschichten, aber das Ausmaß ist beliebig. Was wird er tun? Er wird bei streng konvexer Indifferenzkurve nicht bis nach b wandern, sondern irgendwo auf der Sekante in der Besser-Menge von a anhalten. Er wird ein t zwischen Null und Eins wählen. Wird nun nach der Richtung gefragt, in welcher der Konsument zwar umschichten darf, es aber dennoch unterlässt, dann darf die Gerade durch den Punkt a nicht mehr durch die Besser-Menge von a verlaufen. Diese Bedingung ist bei einer streng konvexen Indifferenzkurve genau dann erfüllt, wenn die Gerade, deren Richtungs-Vektor gesucht

ist, am Güterbündel a die Indifferenzkurve tangiert.

Wir wollen diesen besonderen Richtungs-Vektor als Indifferenz-Richtung im Punkt a bezeichnen. Das Ausmaß einer Umschichtung in Indifferenz-Richtung ist nun in der Tat nebensächlich, da konstruktionsbedingt der Konsument gar keine Umschichtung in dieser Richtung vornehmen will. Geometrisch erhält man diese Gerade und damit die Indifferenz-Richtung, indem die Gerade ℓ solange im Uhrzeigersinn um den Punkt a gedreht wird, bis der Punkt b mit a übereinstimmt. Der zweite Schnittpunkt der Sekante rückt

Abbildung 2.18: Tangente und Indifferenz-Richtung



dabei immer näher an a heran, und die Länge der Sekante schrumpft auf Null.

Analytisch wird dies durch einen Grenzübergang bewerkstelligt. Die Indifferenzkurve $[a]$ des Güterbündels $a = (a_1,\, a_2)$ ist dabei gegeben durch die folgende Punktemenge im Güterraum:

$$[a] = \big\{x \in \mathbb{R}^2_+ : x \sim a\big\} = \big\{(x_1,\, f(x_1)) \in \mathbb{R}^2_+ : (x_1,\, f(x_1)) \sim (a_1,\, f(a_1))\big\}$$

Die erste Menge benennt allgemein die Indifferenzmenge zu einem Güterbündel, die zweite Menge benennt eine Indifferenzkurve durch den Punkt a, d.h.

es wird eine bestimmte funktionale Beziehung f zwischen den Bestandteilen von Gut 1 (x_1) und Gut 2 ($x_2 = f(x_1)$) aller Güterbündel in der Indifferenzmenge $[a]$ unterstellt. Diese funktionale Beziehung kann beispielsweise $x_2 = 9/x_1$ für $x_1 > 0$ oder implizit $x_1 x_2 = 9$ lauten. Noch anders formuliert: eine Indifferenzkurve ist der Graph einer Funktion, deren Definitions- und Wertebereich jeweils die nicht-negativen reellen Zahlen sind und deren Funktionsvorschrift durch f gegeben ist.

Jede Gerade, die durch den Punkt a verläuft und einen weiteren Punkt b mit der Indifferenzkurve gemeinsam hat — also eine Sekante an die Indifferenzkurve als Stecke enthält — kann in der Punkt-Richtungs-Form geschrieben werden als

$$\begin{aligned} a + t(b - a) &= (a_1,\, f(a_1)) + t\,[(b_1,\, f(b_1)) - (a_1,\, f(a_1))] \\ &= (a_1,\, f(a_1)) + t\,(b_1 - a_1,\, f(b_1) - f(a_1)) \end{aligned}$$

setze $b_1 = a_1 + h$ mit variablem h

$$\begin{aligned} &= (a_1,\, f(a_1)) + t\,(a_1 + h - a_1,\, f(a_1 + h) - f(a_1)) \\ &= (a_1,\, f(a_1)) + t\,(h,\, f(a_1 + h) - f(a_1)) \\ &= (a_1,\, f(a_1)) + th\left(1,\, \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h}\right) \end{aligned}$$

Wir interessieren uns nur für den Richtungsvektor

$$\left(1,\, \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h}\right)$$

wenn die beiden Punkte auf der Indifferenzkurve immer näher aneinander rücken, und im Grenzübergang bei $h \to 0$ schließlich zusammenfallen:

$$\lim_{h \to 0} \left(1,\, \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h}\right) = \left(1,\, \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h) - f(a_1)}{h}\right) = (1,\, f'(a_1))$$

Die erste Komponente des Richtungsvektors ist immer Eins und die zweite Komponente des Richtungsvektors wird beim Grenzübergang zur wohlbekannten Ableitung f' der Funktion f an der Stelle a_1. Die Indifferenz-Richtung $i = (1,\, f')$ beim Güterbündel a ist also ein ganz genau definierter Vektor:

- sein Anfangspunkt ist das Güterbündel a,
- seine erste Komponente ist gleich Eins,

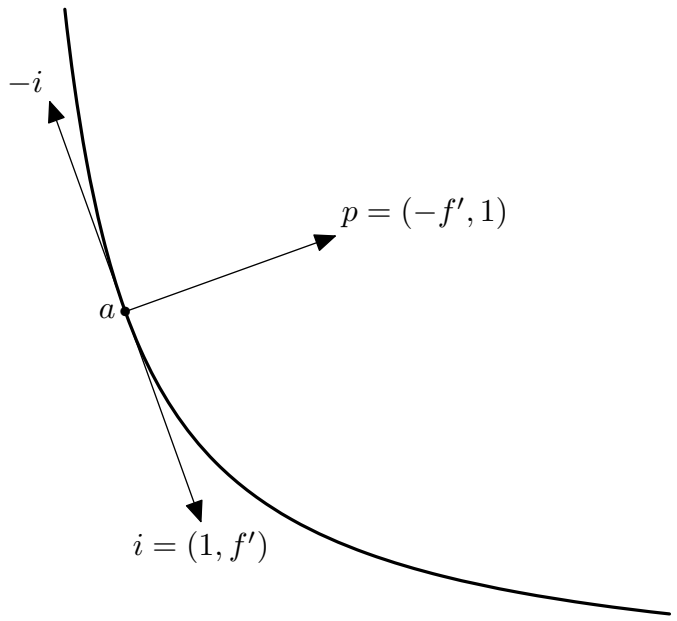
- seine zweite Komponente ist die Ableitung der Indifferenzkurve an der Stelle a und
- seine Länge ist eigentlich beliebig, denn er zeigt immer in die Schlechter-Menge des Güterbündels a bei einer streng konvexen Indifferenzkurve.

Die entgegengesetzte Indifferenz-Richtung $-i = (-1, -f')$ ist auch als Indifferenz-Richtung zu interpretieren. Das unterscheidet sie von den übrigen Richtungen, in denen das Güterbündel a unter bestimmten Umständen in dieser oder in der entgegengesetzten Richtung umgeschichtet wird.

2.3.3 Präferenz-Richtung

Zur Indifferenz-Richtung eines Güterbündels a gibt es genau einen Vektor, der dazu senkrecht verläuft und für jede Länge in die Besser-Menge von a führt. Die Tangente im Punkt a einer streng konvexen Indifferenzkurve verläuft

Abbildung 2.19: Indifferenz- und Präferenz-Richtung



überall — mit Ausnahme des Berührpunktes a — durch die Schlechter-Menge von a. Wenn sich der Konsument von Punkt a ausgehend überlegt, in welcher Richtung er sein Güterbündel umschichten sollte, und zwar unabhängig vom Ausmaß der Umschichtung, dann wird er unweigerlich in Richtung der Besser-Menge von a wollen. Nur wenn er senkrecht zur Indifferenz-Richtung

umschichtet, wird er selbst bei infinitesimalem Ausmaß in die Besser-Menge gelangen. Die zur Indifferenz-Richtung senkrecht verlaufende Richtung wollen wir die Präferenz-Richtung im Punkt a nennen.

Zwei Vektoren sind genau dann senkrecht zueinander (oder orthogonal wie die Mathematiker sagen), wenn ihr Skalarprodukt[7] gleich Null ist. Der unbekannte Vektor der Präferenz-Richtung soll mit $p = (p_1, p_2)$ bezeichnet werden. Nun gilt

$$(p_1, p_2) \cdot (1, f') = 0 = p_1 + p_2 f' \quad \rightsquigarrow \quad p_1 = -p_2 f'$$

Da es auch bei der Präferenz-Richtung nur auf die Richtung und nicht auf die Länge des Vektors ankommt, kann er geschrieben werden als $p = (-f', 1)$.

2.3.4 Veränderungen an Güterbündeln sind Vektoren

Vom Güterbündel a aus betrachtet gibt es eine beliebige Anzahl von Richtungen, in denen das Güterbündel umgeschichtet werden kann. Die Endpunkte aller Richtungs-Vektoren mit einheitlicher Länge liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt a und dem Radius der einheitlichen Länge. Unter all diesen sind zwei Richtungsvektoren von besonderer Bedeutung für den Konsumenten: die Indifferenz-Richtung und die dazu senkrechte Präferenz-Richtung. Die Indifferenz-Richtung ist jene, in der der Konsument unter keinen Umständen bereit ist umzuschichten. Die Präferenz-Richtung ist jene, in der der Konsument unter allen Umständen bereit ist sein Güterbündel a umzuschichten. Bei den übrigen Richtungen kommt es auf das Ausmaß der Umschichtung an, ob also eine in die Besser-Menge hineinführt oder nicht.

Die beiden besonderen Richtungen können anhand der Indifferenzkurve durch den Punkt a direkt berechnet werden, indem die Indifferenzkurve an der Stelle a differenziert (abgeleitet) wird. Die Indifferenz-Richtung ist gegeben durch $i = (1, f')$ oder auch $-i$. Die Präferenzrichtung ist gegeben durch $p = (-f', 1)$, wobei f' die Ableitung der Indifferenzkurve an der Stelle a angibt. Da durch jeden Punkt des Güterraumes eine streng konvexe Indifferenzkurve verläuft, kann auch an jedem Punkt die Indifferenz- und die Präferenz-Richtung angegeben werden.

[7] In der Mathematik wird zwischen sogenannten Zeilen- und Spaltenvektoren unterschieden. Bei Zeilenvektoren werden die Komponenten nebeneinander geschrieben und bei Spaltenvektoren untereinander. Solange jedoch keine Matrizen — das sind rechteckige Zahlentabellen, die sowohl Zeilen als auch Spalten enthalten — ins Spiel kommen, ist diese Unterscheidung belanglos. Das Skalarprodukt zweier Vektoren wird dann manchmal definiert als Zeilenvektor „mal“ Spaltenvektor. Wir folgen dieser Konvention insoweit, als der Vektor rechts vom „mal“-Zeichen immer auch als Spaltenvektor gedacht werden kann.

Die Interpretation einer Veränderung (Umschichtung) eines Güterbündels durch die Punkt-Richtungs-Form hat mehrere Vorzüge.

1. Sie ist einfach, denn sie kommt mit den einfachsten geometrischen Grundbegriffen Punkt, Vektor und Gerade aus.

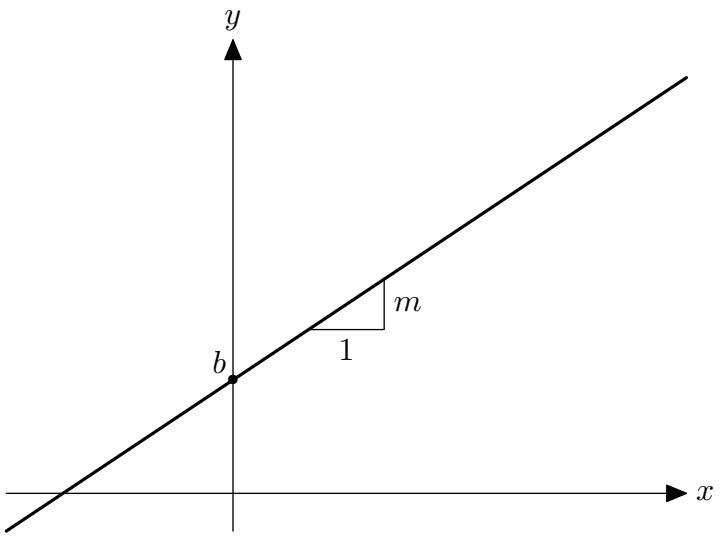
2. Sie erlaubt die Veränderung des Güterbündels durch die einfachen Attribute Ausgangspunkt, Richtung und Ausmaß zu beschreiben, die jede für sich betrachtet, variiert und ökonomisch interpretiert werden können.

3. Sie ist ohne Modifikation mit derselben Anschaulichkeit auf mehr als zwei Güter übertragbar.

2.3.5 Die analytische Geradengleichung

Nun soll die Interpretation der Tangentensteigung mittels eines Steigungsdreicks, die Darstellung der Tangente durch die Geradengleichung $y = b+mx$

Abbildung 2.20: Schulbuch Darstellung einer Geraden



und die Beziehung zur Punkt-Richtungs-Form der vorigen Abschnitte geklärt werden.

Die Geradengleichung $y = b + mx$ wird üblicherweise so gelesen:

- y ist die abhängige Variable,

- b ist der Ordinaten-Abschnitt,
- m ist die Steigung der Geraden, und
- x ist die unabhängige Variable.

Die Steigung der Geraden positiv, falls m eine positive Zahl ist, andernfalls ist sie negativ. Im Sonderfall $m = 0$ wird die Gerade zu einer waagerechten Linie, d.h. sie verläuft parallel zur x-Achse. Eine senkrechte Gerade kann nicht beschrieben werden. Die negative Steigung einer Geraden kann aber auch durch ihren Verlauf in nord-westlicher Richtung oder entgegengesetzter süd-östlicher Richtung gekennzeichnet werden. Eine solche Richtungsangabe ist unmittelbar sinnlich wahrnehmbar und kommt ohne jedes Vorzeichen aus.

Wie verhält es sich nun mit der Steigung einer „Geraden“ bei zwei[8] unabhängigen Variablen x und z, beispielsweise $y = b + m_1x + m_2z$? Es kann doch durchaus sein, dass m_1 und m_2 unterschiedliche Vorzeichen haben. Die Richtung dieser „Geraden“, die eigentlich eine Ebene im dreidimensionalen Raum ist, kann hingegen sehr wohl durch einen Normal-Vektor beschrieben werden. Will man unbedingt Steigen oder Fallen sagen, dann kann dies nur dadurch erreicht werden, dass man sagt, die Ebene steigt in x-Richtung und fällt in z-Richtung, also unter der Hand dann doch wieder durch mehrere Richtungsangaben, welche die einzelnen Komponenten des Normal-Vektors benennen. Wir halten fest: die positive respektive negative Steigung einer Geraden ist ausschließlich bei zwei Variablen sinnvoll; Richtungsangaben unterliegen hingegen nicht dieser Beschränkung.

Dadurch, dass x als unabhängige Variable und y als abhängige Variable bezeichnet wird, bekommt die Geradengleichung $y = b + mx$ die Bedeutung eines Ursache-Wirkungs-Zusammenhangs zwischen den Variablen. Diese Ursache-Wirkungs-Kette kann aber auch umgekehrt werden. Für $m \neq 0$ ergibt sich durch Umstellen $x = -b/m + y/m$, und die Rollen der Variablen sind vertauscht. Wird hingegen x und y als Variablen-Paar aufgefasst und als solches mit (x, y) geschrieben, dann gibt es keine Rollenverteilung mehr, beide Variablen stehen gewissermaßen gleichberechtigt nebeneinander. Wird die Geradengleichung eingesetzt $(x, b + mx)$, dann bekommt die anfänglich unabhängige Variable den Status eines Parameters, der nun auf beide Komponenten des Zwei-Tupels einwirkt. Nach Ausklammern entsteht $(x, b+mx) = (0, b)+x(1, m)$, also die im vorigen Abschnitt benutzte Punkt-Steigungs-Form der Geraden. Eine waagerechte Gerade ist als $(0, b)+x(1, 0)$ darstellbar, was auch durch $m = 0$ schon möglich ist. Eine senkrechte Gerade,

[8] Vereinbarungsgemäß sollen eigentlich Funktionen mit mehreren Veränderlichen nicht angesprochen werden. Wir tun dies hier jedoch nur einmal, zum Zwecke der Klarheit.

die nicht aus der Geradengleichung herleitbar ist, kann durch $(b,\,0)+x(0,\,1)$ dargestellt werden. Bereits mit der Auffassung der beiden Variablen x und y als ein Punkt $(x,\,y)$ ist der Übergang von der analytischen zur geometrischen Betrachtung vollzogen. Betrachtet man das Ergebnis $(0,\,b)+x(1,\,m)$, so verlangt es deutlich mehr Schreibaufwand als die Geradengleichung $y = b+mx$. Dieser höhere Schreibaufwand stellt jedoch die geometrischen statt der analytischen Eigenschaften einer Geraden in den Vordergrund.

Nachdem die analytische Geradengleichung und ihre Beziehung zur geometrischen Punkt-Richtungs-Form geklärt ist, wenden wir uns der Geraden zu, die eine Kurve in einem Punkt berührt der Tangente. Es gibt drei unterschiedliche Betrachtungen einer Tangente:

1. Der Berührpunkt ist gegeben und die Tangential-Richtung ist gesucht.
2. Die Richtung ist gegeben und der Berührpunkt ist gesucht.
3. Sowohl Berührpunkt wie Richtung der Tangente sind gegeben.

2.3.5.1 Tangente als Ergebnis einer Drehung

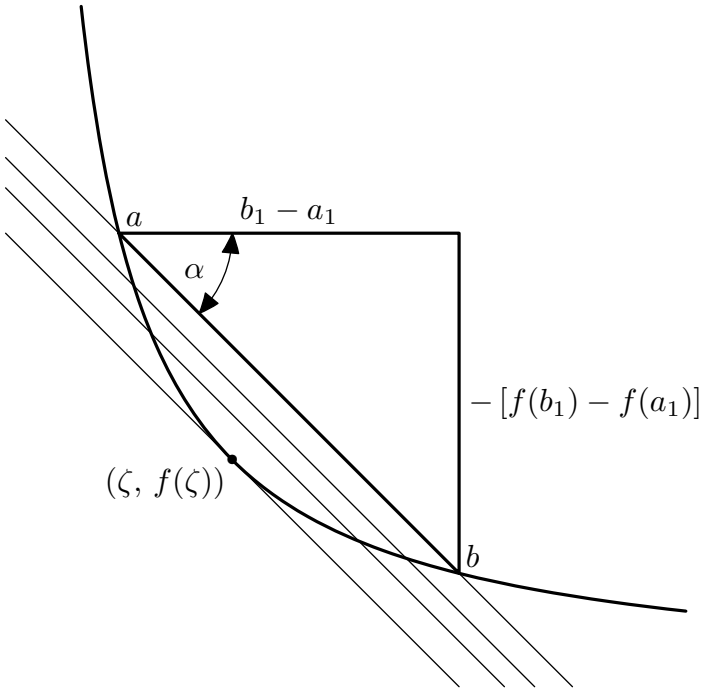
Ist ein Berührpunkt gegeben und wird nach der Tangential-Richtung gefragt, dann ergibt sich die Antwort durch eine Drehung der Geraden, bis aus einer Sekanten eine Tangente wird. In Abbildung 2.18 ist diese Drehen einer Geraden um den Punkt a, solange bis die Sekante auf Null geschrumpft ist, demonstriert. Der Drehpunkt a ist dabei festgehalten und wird zum Berührpunkt der Tangenten. Um die Richtung der Tangente zu bestimmen, wurde ein analytischer Grenzübergang durchgeführt. Die erste Koordinate des Richtungsvektors der Tangente blieb dabei konstant, während die zweite Koordinate als Differentialquotient $\partial f/\partial x = f'$ resultierte. Selbstverständlich darf die Funktion $y = f(x)$ unter rein analytischen Gesichtspunkten betrachtet werden. Hier geht es aber um die geometrische Interpretation der Tangentensteigung, daher darf der (analytische) Grenzübergang auch nicht aus seinem geometrischen Kontext herausgelöst werden.

2.3.5.2 Tangente als Ergebnis einer Verschiebung

Es gibt noch eine zweite Art von einer Sekante zu einer Tangente überzugehen: statt die Gerade um einen bestimmten Punkt zu drehen, kann sie auch parallel verschoben werden, solange, bis wiederum die Länge der Sekante auf Null geschrumpft ist. Statt einen Punkt festzuhalten, wird bei der Parallelverschiebung die Richtung festgehalten. Im Fall der Drehung kennt man von Anfang an den späteren Berührpunkt der Tangente, nicht aber ihre Richtung.

Im Falle der Parallelverschiebung kennt man von Anfang an die Richtung der späteren Tangente, nicht aber ihren Berührpunkt mit der Kurve. Die Parallelverlagerung einer Geraden bis sie die Kurve berührt, ist die geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung. Der Mittelwert-

Abbildung 2.21: Mittelwertsatz der Differentialrechnung



satz der Differentialrechnung lautet: Wenn die Funktion $y = f(x)$ auf einem abgeschlossenen Intervall mit den Endpunkten a_1 und b_1 (wobei $a_1 \neq b_1$) stetig und auf dem offenen Intervall mit denselben Endpunkten differenzierbar ist, dann gibt es ein $\zeta \in]a_1,\ b_1[$ mit

$$f(b_1) - f(a_1) = f'(\zeta)\,(b_1 - a_1)$$

Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sichert unter gewissen Voraussetzungen (die in der Wirtschaftswissenschaften in aller Regel erfüllt sind) die Existenz eines Berührpunktes $(\zeta,\ f(\zeta))$ einer Geraden mit einer fest gewählten Richtung $(1,\ m)$ an eine Kurve $(x,\ f(x))$. Der unbekannte Berührpunkt $(\zeta,\ f(\zeta))$ ist dabei durch die Bedingung $f'(\zeta) = m$ gekennzeichnet. Bei der geometrischen Interpretation des Mittelwertsatzes wird nun meist ein Steigungsdreieck zur Verdeutlichung benutzt, die Steigung bleibt ja während des

Grenzübergangs konstant. Das Steigungsdreieck besitzt achsen-parallele Kathethen, seine Hypothenuse ist durch die anfängliche Sekante gegeben. Da Strecken immer nicht-negative Längen haben, wird der Tangens des Winkels α, der nun in der Tat ein Steigungsmaß der Geraden ist, durch die bekannte Formel

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \left|\frac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}\right| = |f'(\zeta)| = |m|$$

angegeben.

2.3.5.3 Tangente als lineare Approximation

Der zweite Kontext, in dem ein fest vorgegebener Tangens Sinn macht, liegt dann vor, wenn zusätzlich auch noch der Berührpunkt der Tangente fest vorgegeben ist. Die Tangente wird bei fest vorgegebener Richtung und einem fest vorgegebenen (Berühr-) Punkt zu einer eindeutig bestimmten Geraden, die als lineare Approximation einer gekrümmten Kurve dient. Der gekrümmte Kurvenverlauf von $(x,\, y) = (x,\, f(x))$ soll durch einen einfacheren — eben eine Gerade, oder linear — an einer bestimmten Stelle ersetzt werden. An der Stelle a soll die Tangente die Kurve berühren. Die Approximation durch die Tangente ist in der näheren Umgebung von a als (linearer) Ersatz für die (gekrümmte) Kurve zu verstehen. Wenn man sich auf der Tangente von a wegbewegt, entfernt man sich von der Kurve, es sei denn, die Kurve ist in der Nähe von a selbst linear (was die Approximation eigentlich überfüssig macht).

Wenn die Kurve konvex ist, dann ist der Berührpunkt der einzige Punkt, den die Tangente mit der Kurve gemeinsam hat, sie verläuft vollständig nur auf einer Seite der Kurve. Je weiter man sich nun auf der Tangente vom Berührpunkt entfernt, desto ungenauer wird die Approximation an eine konvexe Kurve. In der Mathematik hat es sich eingebürgert — und hier wird dieser Konvention gefolgt — Punkte auf der Tangente, sobald sie als lineare Approximation betrachtet wird, als Differentiale zu bezeichnen. Differentiale sind Vektoren (und später auch Matrizen), deren Anfangspunkt der Berührpunkt ist und deren Richtung durch die Richtung der Tangente gegeben ist. Die Komponenten von Differentialen werden mit $\mathrm{d}\,x_1$, $\mathrm{d}\,x_2$ etc. abgekürzt. Angenommen, die Tangente ist gegeben durch

$$(a_1,\, f(a_1)) + t\,(1,\, f'(a_1))$$

und wir wollen die (streng konvexe Indifferenz-) Kurve $(x,\, f(x))$ an der Stelle $(a_1 + \mathrm{d}\,x_1,\, f(a_1 + \mathrm{d}\,x_1))$ linear approximieren, dann müssen wir uns von

$(a_1,\ f(a_1))$ in Richtung $(1,\ f'(a_1))$ um $t = \mathrm{d}\,x_1$ Längeneinheiten bewegen, wir landen also im Punkt

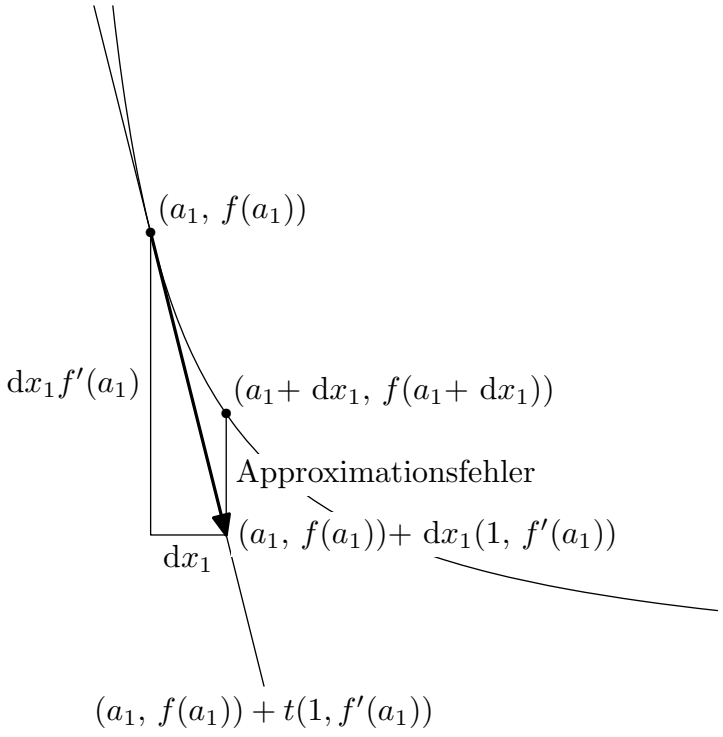
$$(a_1,\ f(a_1)) + \mathrm{d}\,x_1\,(1,\ f'(a_1))$$

und sind somit

$$(a_1 + \mathrm{d}\,x_1,\ f(a_1 + \mathrm{d}\,x_1)) - [(a_1,\ f(a_1)) + \mathrm{d}\,x_1\,(1,\ f'(a_1))] = \\ (0,\ f(a_1 + \mathrm{d}\,x_1) - f(a_1) - \mathrm{d}\,x_1 f'(a_1))$$

vom exakten Punkt auf der Kurve entfernt. Man erkennt sofort, dass der Ap-

Abbildung 2.22: Tangente als lineare Approximation



proximationsfehler ausschließlich die zweite Komponente betrifft. Man darf $\mathrm{d}\,x_1$ beliebig wählen, je größer der Betrag von $\mathrm{d}\,x_1$, desto weiter liegt der betreffende Punkt der Tangente vom Berührpunkt a entfernt und desto größer wird auch der Approximationsfehler. Die Mathematiker haben bewiesen, dass der Approximationsfehler für ein betragsmäßig kleines, aber fest gewähltes $\mathrm{d}\,x_1$ sehr sehr klein oder ungefähr Null ist:

$$f(a_1 + \mathrm{d}\,x_1) - f(a_1) - \mathrm{d}\,x_1 f'(a_1) \approx 0$$

An dieser Stelle darf man keineswegs der Versuchung unterliegen, den Ausdruck auch als Grenzwert zu deuten, denn $f'(a_1)$ ist bereits vorausgesetzt und braucht nicht mehr per Grenzübergang bestimmt zu werden. Wenn man $\mathrm{d}\,x_1 = 0$ wählt, ist man voraussetzungsgemäß im Berührpunkt, folglich kann es dort auch keinen Approximationsfehler geben. Somit ist die Aussage

$$\lim_{\mathrm{d}\,x_1 \to 0} \frac{f(a_1 + \mathrm{d}\,x_1) - f(a_1)}{\mathrm{d}\,x_1} = f'(a_1)$$

bestenfalls als eine triviale Wiederholung der Voraussetzung zu deuten und keinesfalls als eine neue Einsicht oder gar als Berechnung eines Grenzwertes.

2.3.5.4 Zwischenergebnis

Zusammenfassend kann man festhalten:

- Die Grenzrate der Substitution ist die zweite Komponente m des Richtungsvektors einer Geraden.
- Diese Gerade hat mit der streng konvexen Indifferenzkurve $(x,\ f(x))$ genau einen Berührpunkt $(a_1,\ f(a_1))$ gemeinsam, sie tangiert die Indifferenzkurve am Berührpunkt.
- Ist der Berührpunkt gegeben und der Richtungsvektor der Tangente gesucht, dann kann er durch einen analytischen Grenzübergang, der geometrisch als Drehung einer Geraden aufzufassen ist, bestimmt werden. Bei dieser Fragestellung ergibt sich die Lösung $m = f'(a_1)$.
- Ist die Richtung der Tangente vorgegeben, kann der Berührpunkt durch einen analytischen Grenzübergang, welcher geometrisch als Parallelverschiebung einer Geraden aufzufassen ist, bestimmt werden.
- Ist sowohl die Richtung als auch der Berührpunkt einer Tangente gegeben, dann kann sie als lineare Approximation einer Kurve benutzt werden.

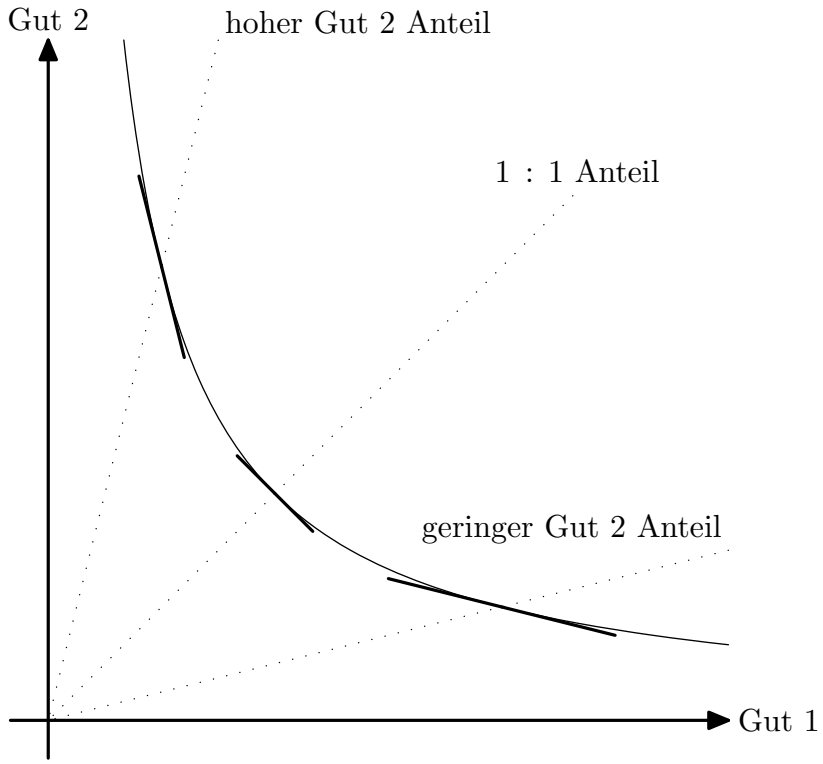
Eine Indifferenzkurve, welche die Eigenschaft der Nicht-Sättigung aufweist, ist eine im Güterraum streng monoton fallende Kurve $(x,\ f(x))$, d.h. je größer x, desto kleiner ist $f(x)$; darum ist $f' < 0$.

Die Grenzrate der Substitution ist jene besondere Substitutions-Richtung, bei welcher der Konsument nicht bereit ist das Güterbündel a — den Berührpunkt der Tangente — umzuschichten. Sie ist insofern ein Schwellenwert, da der Konsument auch nicht bereit ist in der entgegengesetzten Richtung das Güterbündel a umzuschichten. Alle anderen Substitutionsrichtungen sind so, dass der Konsument entweder in diese oder aber in die entgegengesetzte Richtung zur Umschichtung bereit ist.

2.3.6 Gesetz der abnehmenden GRS

Streng konvexe Indifferenzkurven erfüllen das Gesetz der sinkenden Grenzrate der Substitution. Dieses „Gesetz“ ist ein Terminus Technikus dafür, dass eine streng konvexe Indifferenzkurve links oben im zweidimensionalen Güterraum steil (also ungefähr senkrecht) und rechts unten flach (also ungefähr waagerecht) verläuft.

Abbildung 2.23: „Sinkende“ Grenzrate der Substitution



Das Gesetz der sinkenden Grenzrate der Substitution basiert auf einer charakteristischen Eigenschaft streng konvexer Funktionen, die bereits mehrfach angesprochen wurde: Eine streng konvexe Funktion biegt sich immer weiter von einer Tangente weg, sodass der Approximationsfehler mit zunehmender Entfernung vom Berührpunkt immer größer wird. Für Funktionen mit einer Veränderlichen bedeutet dies in analytischer Hinsicht, dass die zweite Ableitung an jeder Stelle positiv ist. Bei einer streng konvexen Indifferenzkurve $(x_1,\ f(x_1))$ bedeutet dies $f'' > 0$. Da wegen der Nicht-Sättigung an jeder Stelle die Indifferenzkurve eine negative erste Ableitung hat $(f' < 0)$, ergibt sich der in der vorigen Abbildung dargestellte Zusammenhang: Je größer x_1,

desto größer muss f' sein, aber zugleich immer negativ bleiben. Beispielsweise könnten die Werte der ersten Ableitung an den drei Stellen von links nach rechts -8, -5 und -0.6 lauten.

Um das Attribut „sinkende“ im Terminus Technikus zu rechtfertigen, liegt es nahe, die Grenzrate der Substitution als absoluten Betrag der ersten Ableitung zu definieren, wie beispielsweise im Lehrbuch von Schumann et al. (1999), denn die absoluten Beträge $|f'|$ fallen, falls $f' < 0$ und $f'' > 0$, wenn man den Definitionsbereich von f von links nach rechts durchläuft.

Soll das Gesetz der sinkenden Grenzrate der Substitution inhaltlich verstanden werden, so hat man mehrfach um die Ecke zu denken, um seinen Sinn zu erfassen:

- die Grenzrate der Substitution ist jene besondere Substitutionsrichtung, in der der Konsument das zugrunde liegende Güterbündel unter keinen Umständen umschichtet, also eine besondere Ruhelage, in welcher keine Substitution stattfindet;
- diese Grenzrate sinkt in dem Sinne, dass $|f'|$ immer kleiner wird, wenn die Indifferenzkurve von links oben nach rechts unten durchlaufen wird;
- es ist ein Gesetz, weil es sich um eine weitverbreitete Art und Weise handelt, wie Güterbündel nutzenmäßig eingestuft werden.

Im Lexikon der Volkswirtschaft findet sich folgende Definition, deren Erfassung die zuvor beschriebene Gedankenakrobatik erfordert:

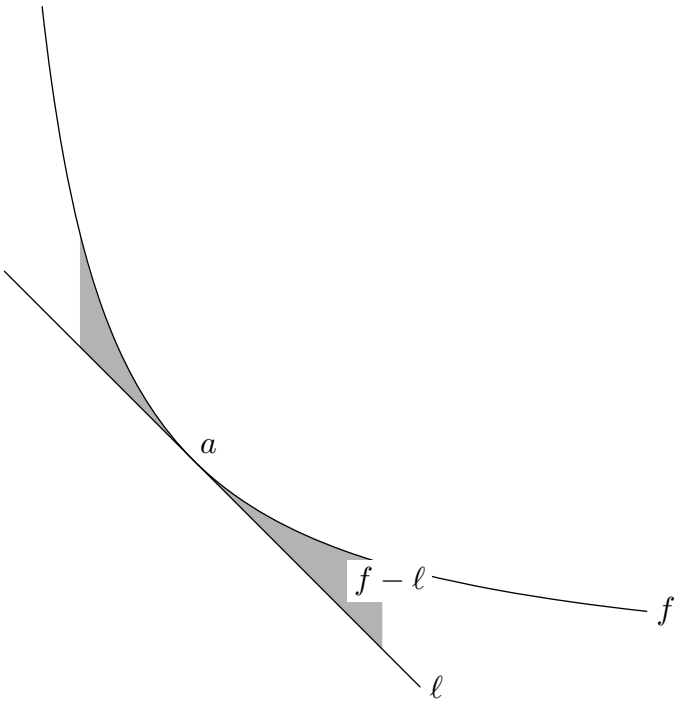
> Die Grenzrate der Substitution des Gutes y durch Gut x ist jene Menge y, deren Abgang durch Erhöhung von x um eine Einheit bei unverändertem Versorgungsniveau (→ Indifferenzkurven) gerade ausgeglichen wird. (...)
> Das Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution beinhaltet, dass mit zunehmender Menge des Gutes x ein Wirtschaftssubjekt für jede weitere Einheit von x eine immer kleiner werdende Menge von y aufgibt. Die Steigung der Tangente an die Indifferenzkurve (Substitutionstangente), durch welche die Grenzrate der Substitution gemessen wird, nimmt mit wachsender Menge von x (absolut) ab. (Geigant et al., 2000, S. 327)

2.3.7 Zweite Ableitung und strenge Konvexität

Die strenge Konvexität kann bei einer zweimal differenzierbaren Funktion $y = f(x)$, oder einer Kurve $(x, f(x))$ auch anhand der zweiten Ableitung charakterisiert werden. Wir wollen diese Eigenschaft am Beispiel einer streng

konvexen Indifferenzkurve geometrisch interpretieren. Man betrachtet dazu den Approximationsfehler, der sich bei einer linearen Approximation durch eine Tangente ergibt. Der Approximationsfehler bei linearer Approximation einer streng konvexen (Indifferenz-) Kurve ist immer positiv, nur am Berührpunkt der Tangente ist er Null. Bewegt man sich auf der Tangente vom Berührpunkt nach links oder nach rechts, dann wird der Approximationsfehler immer größer.

Abbildung 2.24: Parabelförmiger Approximationsfehler

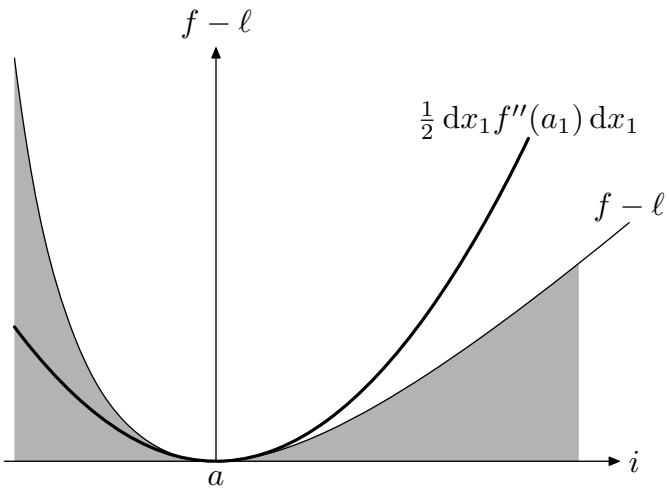


Der dunkel unterlegte Bereich in Abbildung 2.24 markiert den Approximationsfehler. Seine parabelförmige Gestalt ist zwar zu erahnen, aber durch die Verzerrung der schräg verlaufenden Tangente ℓ noch nicht deutlich erkennbar. Daher ist es sinnvoll eine neue Graphik zu konstruieren, in der die Tangente ℓ waagerecht verläuft und damit als Abszisse eines neuen Koordinatensystems fungiert. Der Ursprung des neuen Koordinatensystems ist der Berührpunkt a der Tangente.

Wenn die Beziehung zwischen einem Punkt auf der Tangente ℓ und dem zugehörigen Approximationsfehler $f - \ell$ betrachtet wird, dann hat sich unter der Hand der beliebig, aber fest wählbare Parameter $\mathrm{d}\, x_1$ der Tangente in eine Variable verwandelt, die nun sogar ausdrücklich als unabhängige Variable zu

behandeln ist. Sowohl in der Mathematik als auch in der Mikroökonomik wird dieser Übergang von Parameter zu Variable immer wieder vollzogen, ohne dass darauf in der Regel aufmerksam gemacht wird. Nach wie vor bleibt aber der Berührpunkt fixiert. Da aber auch der Berührpunkt beliebig auf der Indifferenzkurve gewählt wurde, ist die Beziehung zwischen Differential $\mathrm{d}\,x_1$ und Approximationsfehler $f-\ell$ auch so zu verstehen, dass die parabelförmige Gestalt *an jeder Stelle* für streng konvexe Indifferenzkurven typisch ist. Der Berührpunkt a, der Ursprung des neuen Koordinatensystems, ist also auch ein Parameter. Der Approximationsfehler ist nicht symmetrisch zur $f-\ell$

Abbildung 2.25: Approximation durch eine Parabel



Achse — dies ist zugleich die früher angesprochene Präferenz-Richtung — wohl aber die Parabel

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\,x_1 f''(a_1)\,\mathrm{d}\,x_1$$

Dennoch macht die Abbildung 2.25 deutlich, dass sie sich in der Nähe ihres Scheitels im Punkt a erkennbar besser an die Indifferenzkurve anschmiegt als die Tangente ℓ. Die Parabel ist nach oben geöffnet, was durch $f''(a_2) > 0$ verursacht ist. Sie ist für manchen Leser vielleicht etwas seltsam notiert. Dafür gibt es zwei Gründe:

1. Später, wenn der Satz von Taylor im Rahmen der Mathe 1 Vorlesung behandelt ist, wird verständlich, dass diese Parabel eigentlich das zweite Glied einer Taylor-Reihe darstellt, während die Tangente deren erstes Glied ist.

2. Noch später, wenn im Rahmen der Mathe 2 Vorlesung Funktionen mit mehreren Variablen und deren Ableitungen behandelt sind, wird das f'' als die Hesse-Matrix und der Ausdruck $\mathrm{d}\,x f'' \,\mathrm{d}\,x$ als eine quadratische Form interpretiert, die im Falle einer konvexen Funktion (mit mehreren Veränderlichen) positiv *definit* ist.

2.3.8 Strenge Konvexität im Rückblick

Die strenge Konvexität von Indifferenzkurven ist eine ausgesprochen reichhaltige Eigenschaft der Präferenzordnung.

Ihre einfachste Charakterisierung besteht darin, dass eine beliebige Sekante durch die Besser-Menge verläuft. Dies wurde anschaulich dadurch als ein Verhaltensmuster interpretiert, wonach ein Konsument die Mischung zweier Güterbündel strikt präferiert gegenüber den beiden Ausgangsbündeln a und b, zwischen denen er indifferent ist.

Die nächste Charakterisierung einer streng konvexen Indifferenzkurve bezog sich darauf, dass eine Tangente — mit Ausnahme des Berührpunktes — durch die Schlechter-Menge des Tangeltialpunktes verläuft. Dies nahmen wir zum Anlass, die Richtung der Tangente als Indifferenz-Richtung zu bezeichnen. Auch sie besitzt noch eine anschauliche ökonomische Interpretation: Wenn der Konsument vom Berührpunkt ausgehend sein Güterbündel in Indifferenz-Richtung umschichten darf, dann wird er jeden Handel aussschlagen und bei seinem Güterbündel verbleiben. Die dazu senkrechte Richtung in die Besser-Menge des Berührpunktes wurde als Präferenz-Richtung bezeichnet, in welcher der Konsument unter allen Umständen zum Umschichten bereit ist.

Die letzte Charakterisierung der strengen Konvexität einer Indifferenzkurve beruht auf der Eigenheit des Approximationsfehlers bei linearer Approximation, und damit letztendlich auf das Vorzeichen der zweiten Ableitung der funktionalen Beziehung f zwischen den Gütersorten in einer Indifferenzmenge. Es darf zurecht als die sowohl speziellste auch als unanschaulichste Eigenheit angesehen werden. Aber gerade auf dem Vorzeichen dieser zweiten Ableitung basiert das Gesetz der sinkenden Grenzrate der Substitution. Es ist hoffentlich bereits anhand der beiden vorigen Charakterisierungen klar geworden, wie die strenge Konvexität einer Indifferenzkurve ökonomisch zu interpretieren ist.

Alle drei Charakterisierungen der strengen Konvexität verweisen auf eine besondere Krümmung der Indifferenzkurve und sind gänzlich unabhängig von ihrer Monotonie. M.a.W. gibt es auch streng monoton steigende Kurven (keine Indifferenzkurven, denn sonst wäre die Nicht-Sättigung der Präferenzordnung verletzt), welche konvex sind, beispielsweise die Exponentialfunk-

tion e^x. Weiterhin darf die strenge Konvexität einer Indifferenzkurve nicht mit der allgemeinen Konvexität des Güterraumes verwechselt werden. Letztere besteht einfach darin, dass man Güterbündel beliebig mischen darf und die Mischung selbst wieder ein Güterbündel ist, vollkommen unabhängig von jedweder Präferenzordnung.

2.4 Zeitbeschränkung und optimales Güterbündel

Nachdem nun die Präferenz-Axiome und die daraus konstruierbaren streng konvexen Indifferenzkurven als geometrisches Werkzeug bereitstehen, ist es höchste Zeit, eine erste wichtige Anwendung all dessen vorzustellen. Um vom abstrakten, tiefschürfenden Erwägen der Konvexität wegzukommen, wollen wir eine kurze Geschichte erzählen.

Auf einer Insel mit mildem Klima lebte dereinst ein junger Mann mit Namen Gregor. Einen großen Teil seiner Zeit verbrachte er mit Schlafen. Um der Wahrheit die Ehre zu geben: Gregor war beim Schlafen nicht alleine und er verbrachte genau die Hälfte eines Tages damit (natürlich nachts). Während der andere Hälfte durchstreifte er die paradiesische Vegetation der Insel auf der Suche nach Früchten. Gregor war bekennender Veganer und so kam es ihm zupass, dass auf der Insel neben ein paar wilden Ziegen, die ihn überhaupt nicht als Nahrungsquelle interessierten, wilde Mangos und Kokospalmen gediehen. Die Mangos hatten es ihm angetan, er konnte sie einfach vom Busch pfücken, sie waren saftig und süß. Aber erst die Kokosmilch! Ihr könnt Euch kaum vorstellen, wie sehr Gregor Kokosmilch liebte, wenn Ihr nicht auch bekennende Veganer seid. Veganer dürfen nämlich gar keine Milch trinken und auch keine Milchprodukte wie Quark oder Käse essen — einzige Ausnahme ist die Kokosmilch. Auch war Gregor davon überzeugt, dass der Genuss von Kokosmilch seine Manneskraft regeneriere (Ihr wisst schon: für die kommende Nacht). Allerdings war an die Kokosmilch nicht so leicht ranzukommen wie an die Mangos.

Um vier Mangos zu finden, benötigte Gregor eine Stunde, aber ein Liter Kokosmilch kostete ihn ganze zwei Stunden. Denn er musste erst mal an einer der Kokospalmen ganz hoch in den Gipfel klettern, einige Früchte mühevoll losruckeln und wenn er sie dann schließlich unten eingesammelt hatte, begann erst die richtige Plackerei des Öffnens. Viele Tage lang hatte Gregor recht unterschiedliche Zusammenstellungen seiner Mahlzeiten, mal waren es 2 Liter Kokosmilch und 32 Mangos, ein anderes mal waren es 5 Liter Kokosmilch und 8 Mangos. An einem Tag, an dem er nur wenig Lust zum Laufen hatte,

war Schmalhans Küchenmeister, und Gregor konnte gerade mal einen Liter Kokosmilch und drei Mangos verspeisen.

In jener Nacht, als er so mit fast leerem Magen an seinem Schreibtisch saß, stieß Gregor beim Surfen im Internet zufällig auf eine wahre Fundgrube mit total coolen Infos zur Mikroökonomik und anderen volkswirtschaftlichen Themen. Er war — wie könnte es anders sein — beim guten alten `http://kaldor.vwl.uni-hannover.de/` gelandet. Inmitten seiner Lektüre berührte ihn eine Hand sanft an der Schulter: „Nicht jetzt“ murmelte Gregor, er war ganz gefesselt davon was er da gerade über die Indifferenz-Richtung und die Präferenz-Richtung las. „Du und Dein verdammter Laptop“ ertönte es hinter ihm, aber Gregor hörte gar nicht hin, gespannt beugte er sich noch näher an den Bildschirm und findet sich mit einem mal inmitten seiner eigenen Geschichte. „Halt! Nicht weiter! Nur ja keinen falschen Gedanken, oder meine Zukunft ist in Gefahr“. Gregor denkt nach. Irgendwie muss das doch einen Sinn ergeben und mir den Weg zu meinem Glück zeigen.

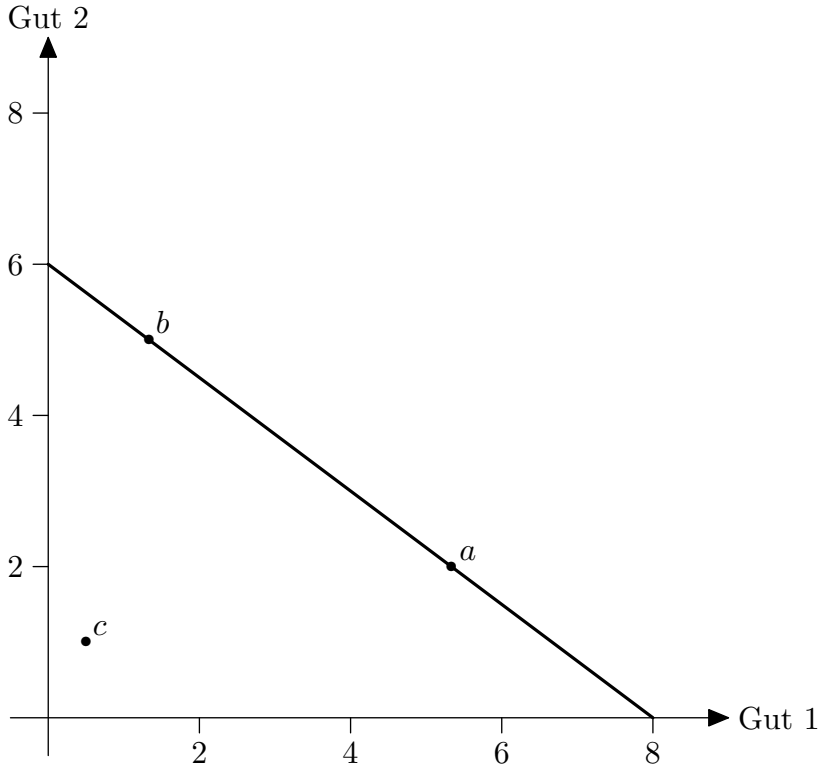
Ich kann wohl an ganz ganz viel Kokosmilch denken, ein ganzes Meer davon kann ich mir vorstellen, aber ich bekomme ja doch nur allerhöchstens sechs Liter pro Tag und dann habe ich gar keine Mangos und wenn ich Mangos haben will, dann muss ich eigentlich auf meine geliebte Kokosmilch verzichten. Da steht doch so was ähnliches im Mikroskript. (Gregor blättert ein paar Seiten zurück.) Ich hab's entdeckt! Wenn ich mir vorstelle, dass ich mein Güterbündel nur in einer bestimmten Richtung, oder der genau entgegengesetzten Richtung umschichten kann, dann brauche ich eigentlich nur das Güterbündel zu wählen, bei dem die Richtung gerade die Indifferenz-Richtung ist. Und die Richtung, in der ich meine Güterbündel umschichten kann, die kenne ich, pro Liter Kokosmilch muss ich auf acht Mangos verzichten. Ja, ich weiß sogar, wo genau meine Gerade mit dieser Richtung verläuft. Wenn ich pro Stunde vier Mangos ernten kann, dann brauche ich für eine Mango gerade eine viertel Stunde und für einen Liter Kokosmilch brauche ich genau 2 Stunden. In der Summe muss mein Zeitverbrauch für Mangos und Kokosmilch genau 12 Stunden ergeben. Also kann ich nur solche Güterbüdel erlangen, für die

$$\frac{1}{4}\,\text{Mangos} + 2\,\text{Liter Kokosmilch} = 12$$

gilt. So weit so gut. Am besten wird sein, ich benenne meine Gütersorten so wie im Skript, dann fällt es mir leichter weiterzudenken. Eigentlich ist es egal, ob ich nun die Mangos oder die Kokosmilch als Gut 1 bezeichne, ich muss nur die einmal gewählte Benennung beibehalten. Also gut, ich sage Gut 1 statt Mango und Gut 2 statt Kokosmilch und die Güterquanta nenne ich einfach x_1 und x_2. Mal schaun, wie mein Zeitbudget aussieht.

Gregor öffnet auf seinem Laptop ein neues Fenster — einen transparenten Eterm — und übermittelt seinem Graphiktool `gnuplot` per Kommandozeile die Anweisung: „Zeichne mir doch bitte einen Ausschnitt von $x_1/4 + 2x_2 = 12$“. Im Handumdrehn erscheint eine Abbildung, aber die Standardeinstellungen bei `gnuplot` sind die Intervalle von -10 bis 10 für jede Variable. „Ich will nur positive Werte für x_1 und x_2 sehen, x_1 sollen Sechser-Pack-Einheiten und x_2 sollen Liter-Einheiten sein“ präzisiert Gregor seine Bitte und fügt hinzu „Zeig mir bitte auch noch meine empirischen Daten, Du findest sie in der Datei e.dat“. Misstrauisch überprüft Gregor den Plot,

Abbildung 2.26: Gregors Zeitbudget



denn der Laptop hat ihm wieder mal gezeigt, dass er sich wie Till Eulenspiegel benimmt und wortwörtlich genau das tut, was man ihm sagt. Diesmal scheint aber alles so zu sein wie gewünscht. Der Tag mit den 2 Litern Kokosmilch und 32 Mangos ist das Güterbündel a, und 32 Mangos entsprechen $32/6 = 16/3 = 5 + 1/3$ Sechser-Pack-Einheiten Mangos. Das Güterbündel c ist die miserable Ernte von heute, als ich keine Lust zum Laufen hatte, am besten ich streiche diesen Tag aus meinem Leben.

Wie sieht denn die Punkt-Richtungs-Form meines Zeitbudgets aus? Ach ja, ich habe die x_1 Einheiten ja als Sechser-Pack gewünscht, also wie sieht die Punkt-Richtungs-Form von $(6/4)x_1 + 2x_2 = 12$ aus? Zunächst sind dies die Güterbündel (x_1, x_2). Nun $(6/4)x_1 + 2x_2 = 12$ nach x_2 auflösen ergibt $x_2 = 6 - (3/4)x_1$, und einsetzen in (x_1, x_2) liefert mir $(x_1, 6 - (3/4)x_1)$, ausklammern von x_1 zeigt dann die Punkt-Richtungs-Form

$$(0,\, 6) + x_1 \left(1,\, -\frac{3}{4}\right) \qquad 0 \leq x_1 \leq 8$$

Nun kenne ich meine Indifferenz-Richtung — $(1, -(3/4))$ — wie lautet aber meine Präferenz-Richtung? Ah ja, sie muss senkrecht zu dieser Richtung verlaufen, also $((3/4), 1)$. Besser ich mache die Probe, um sicher zu sein: Skalarprodukt aus Präferenz- und Indifferenz-Richtung ist gleich $((3/4), 1) \cdot (1, -(3/4)) = (3/4) - (3/4) = 0$, stimmt. Die beiden Güterquanta der Präferenz-Richtung sind 3/4 und 1. Für beide brauche ich ja jeweils genau dieselbe Zeit, nämlich zwei Stunden. Das kann kein Zufall sein! Dennoch will ich das jetzt nicht weiter vertiefen. Mich interessiert viel mehr, wo denn nun das Güterbündel liegt, bei dem ich nicht mehr umschichten will.

Zunächst einmal sollte ich mir über meine Präferenzordnung Klarheit verschaffen. Wenn ich es so recht bedenke, dann ist für mich jedes der beiden Güter unverzichtbar, außerdem bin ich unersättlich. Insgesamt ist meine Nutzenfunktion einfach das Produkt $x_1 x_2$ aus den Komponenten eines Güterbündels. Wenn ich nun das Güterbündel b auf meinem Zeitbudget betrachte, dann ist es auch ein Element einer Indifferenzkurve, aber welcher? Das Güterbündel $b = (4/3, 5)$, also beträgt das Nutzenniveau dort $5(4/3) = 20/3$ und die Indifferenzkurve, die dort hindurchläuft, lautet

$$x_1 x_2 = \frac{20}{3} \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = \frac{20}{3x_1}$$

Und nun dasselbe noch mal für das Güterbündel a. Dort ist das Nutzenniveau $(16/3)2 = 32/3$ und die Indifferenzkurve, die dort verläuft, lautet $x_2 = 32/(3x_1)$. Da in a mein Nutzenniveau größer als in b ist, starte ich am besten von a in der entgegengesetzten Indifferenz-Richtung, aber mit ganz kleinen Schritten, sage $\mathrm{d}\, x_1 = -1/3$. Das neue Güterbündel a' ist dann

$$a' = \left(\frac{16}{3},\, 2\right) - \frac{1}{3}\left(1,\, -\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{16}{3} - \frac{1}{3},\, 2 + \frac{1}{3}\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{15}{3},\, \frac{9}{4}\right)$$

und das Nutzenniveau beträgt dort $5(9/4) = 45/4$, ist also schon größer als in a. Noch einen kleinen Schritt weiter nach $(14/3, 10/4)$ und ich bin schon beim Nutzenniveau $140/12 > 135/12 = 45/4$. Klappt ja wunderbar, noch

einen solchen kleinen Schritt weiter liegt das Güterbündel (13/3, 11/4) mit dem Nutzenniveau 143/12 und noch einen Schritt weiter nach (12/3, 12/4) ergibt ein Nutzenniveau von 144/12. Noch einen letzten kleinen Schritt weiter nach (11/3, 13/4) und das Nutzenniveau beläuft sich auf 143/12. Der letzte Schritt war zuviel oder vielleicht zu weit. Am besten wird sein, wenn ich mir die Indifferenzkurve des vorherigen Güterbündels (12/3, 12/4) mal genauer anschaue.

$$x_1 x_2 = \frac{144}{12} \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = \frac{144}{12 x_1}$$

und die erste Ableitung an der Stelle $x_1 = 4$ lautet $-12/4^2 = -3/4$. Ich glaube, das wars schon. Das Güterbündel (12/3, 12/4) = (4, 3) = a^* ist jenes, welches nicht nur auf meinem Zeitbudget liegt, sondern ist auch der Berührpunkt meines Zeitbudgets an eine Indifferenzkurve. Da alle meine Indifferenzkurven streng konvex verlaufen, ist dies auch der einzige Berührpunkt mit einer von ihnen. Von diesem Berührpunkt a^* aus betrachtet verläuft mein Zeitbudget überall sonst in der Schlechter-Menge von a^*, also kann es mir nirgendwo sonst besser gehen als genau hier.

Wenn ich so zurückblicke, dann war der Weg hierher nach a^* ganz einfach zu finden:

1. Gestartet bin ich bei einem Güterbündel a auf meinem Zeitbudget und zwar mit kleinen Schritten in derselben bzw. der genau entgegengesetzten Richtung meines Zeitbudgets.

2. Ob ich dadurch in die Besser-Menge von a, a', ... gelangte, konnte ich jedesmal überprüfen, indem ich den Nutzenindex des neuen Güterbündels mit dem vorigen verglich.

3. Als dann der Nutzenindex wieder kleiner wurde, war klar, dass das vorige Güterbündel besser war. Bei seiner genaueren Überprüfung stellte sich dann tatsächlich heraus, dass es bereits das beste unter den gegebenen Umständen war. Im Zweifelsfall wäre ich einfach mit einem etwas kleineren Schritt weitergegangen.

In Zukunft werde ich bis auf weiteres tagtäglich das Güterbündel a^* ernten und ein glücklicher Mann sein. Jetzt ist es aber Zeit zum Ausruhen! Die Graphik mit meinem optimalen Güterbündel kann ich mir auch noch in der kommenden Nacht betrachten, falls mir sonst nichts besseres einfällt.

2.5 Indifferenzkurven und Nutzenfunktion

Eine Nutzenfunktion ist zunächst einmal eine Numerierung der bereits sortierten Indifferenzmengen bzw. -kurven einer Präferenzordnung in aufsteigender Reihenfolge. Jeder Indifferenzkurve wird eine einzige (reelle) Zahl — der Funktionswert der Nutzenfunktion — zugeordnet und unterschiedlichen Indifferenzkurven sind auch unterschiedliche Zahlen zugeordnet. Den Güterbündeln einer einzelnen Indifferenzmenge bzw. -kurve wird also durch eine Nutzenfunktion ein und dieselbe Zahl zugeordnet.

Wenn auf einer Indifferenzkurve gleiches Nutzenniveau bei unterschiedlicher Zusammensetzung der Güterbündel gilt, dann kann umgekehrt auch nach verschiedenen Nutzenniveaus bei gleicher Zusammensetzung der Güterbündel gefragt werden. Dabei wird aus jeder Indifferenzkurve genau ein Güterbündel — ein Vertreter — ausgewählt und zwar so, dass alle Vertreter dieselbe proportionale Zusammensetzung aufweisen. Ein solches vollständiges Vertretersystem ist beispielsweise durch $x_1 = x_2$ gegeben. Mit dieser Herangehensweise wird erreicht, dass die Nutzenfunktion, die im Falle zweier Gütersorten eigentlich eine Funktion mit zwei Variablen ist, so behandelt werden kann, als ob sie nur eine einzige unabhängige Variable hätte. Diese einzige unabhängige Variable ist genau das Vielfache eines fest gewählten Einheitsbündels. Mit $x_1 = x_2$, können alle Vertreter von Indifferenzkurven als $(x_1, x_2) = x_1\,(1, 1) = t\,(1, 1)$ angeschrieben werden, dabei ist t eine beliebige positive reelle Zahl, die das Vielfache des fest gewählten Standard-Bündels $(1, 1)$ angibt. Auch andere fest vorgegebene Zusammensetzungen von Güterbündeln ergeben bei variabler Vervielfachung ein vollständiges Vertretersystem aller Indifferenzkurven einer Präferenzordnung. Durch die Wahl eines bestimmten Standard-Bündels wird dieses zum Parameter und der Vervielfachungs-Faktor zur Variablen.

2.5.1 Produkt-Nutzenfunktion

Die Produkt-Nutzenfunktion ist definiert als das Produkt $u = x_1x_2$ der beiden Komponenten eines Güterbündels $x = (x_1, x_2)$. Wird als das Einheitsgüterbündel der Punkt $(1, 1)$ des Güterraumes vorgegeben und das t-fache davon betrachtet, dann ergibt sich $u = t^2$. Die Produkt-Nutzenfunktion wird auf dem Vertretersystem $t\,(1, 1)$ also zu einer halben Normalparabel (negative Werte für t sind ausgeschlossen).

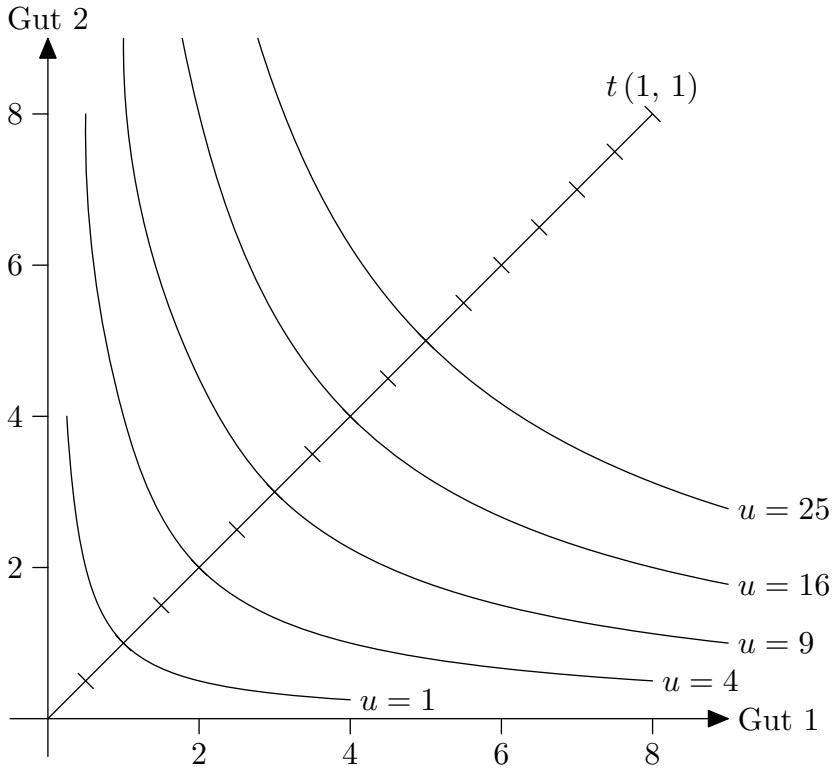
Eine typische Indifferenzkurve der Produkt-Nutzenfunktion erhält man, indem der Funktionswert $u = c$ konstant gesetzt und nach allen Güterbündeln (x_1, x_2) gefragt wird, bei denen das Produkt der beiden Komponenten gerade

gleich dem Funktionswert c ist:

$$x_1 x_2 = c \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = \frac{c}{x_1} \quad \text{für} \quad x_1 > 0$$

Die Indifferenzkurven einer Produkt-Nutzenfunktion sind Hyperbeln und

Abbildung 2.27: Indifferenzkurven der Produkt-Nutzenfunktion



somit streng konvex. Die Indifferenzkurven nähern sich asympthotisch den beiden Güter-Achsen. Dies bedeutet, dass keines der beiden Güter vollständig durch das andere ersetzbar ist, ohne den Nutzen auf Null zu reduzieren. Anders formuliert: jede Gütersorte ist für den Konsumenten unverzichtbar; zwar lässt sich bei gleichem Nutzenniveau eine Gütersorte in begrenztem Umfang durch die andere ersetzen aber eben nicht vollständig.

Bei ganz strikter Betrachtung erfüllt die Produkt-Nutzenfunktion allerdings nicht das Axiom der Nicht-Sättigung, denn fehlt eines der beiden Güter völlig, dann ist der Nutzen gleich Null ganz unabhängig vom Quantum des anderen Gutes. Beispielsweise ist das Güterbündel $a = (2, 0)$ größer als

das Güterbündel $b = (1, 0)$ und bei Nicht-Sättigung müsste $a \succ b$ folglich $u(a) > u(b)$ gelten, aber bei der Produkt-Nutzenfunktion ergibt sich $2 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$ derselbe Funktionwert bei beiden.

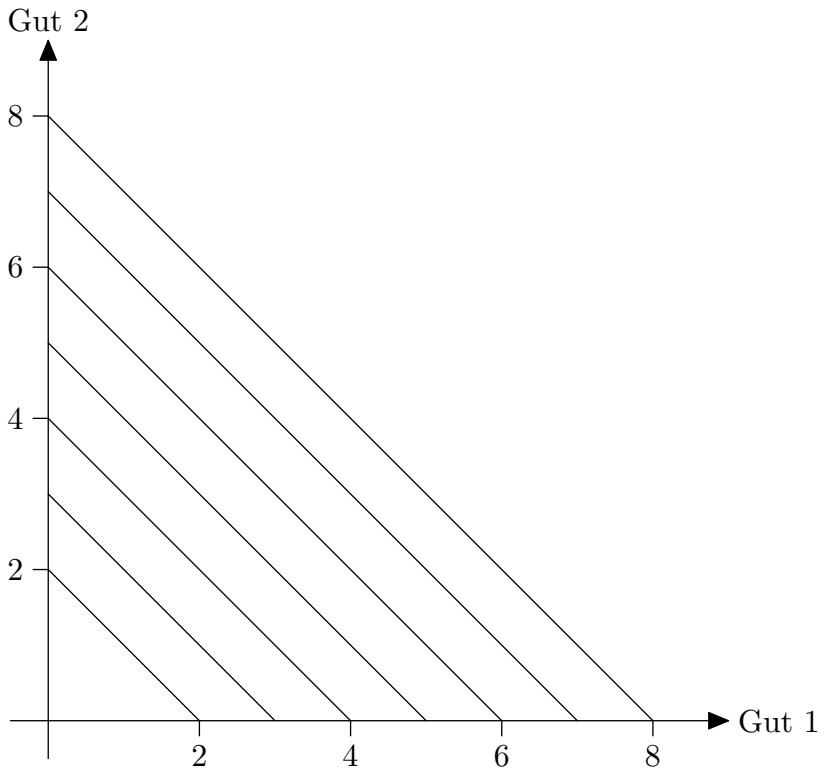
2.5.2 Summe-Nutzenfunktion

Die Summe-Nutzenfunktion ist definiert als die Summe $u = x_1 + x_2$ der Komponenten eines Güterbündels. Auch bei der Summe-Nutzenfunktion ergibt sich eine typische Indifferenzkurve, indem $u = c$ gesetzt und nach allen Güterbündeln (x_1, x_2) gefragt wird, deren Summe gleich c ist:

$$x_1 + x_2 = c \rightsquigarrow \quad x_2 = c - x_1$$

Die Indifferenzkurven einer Summe-Nutzenfunktion sind Geraden und damit

Abbildung 2.28: Indifferenzkurven der Summe-Nutzenfunktion



lediglich konvex aber nicht streng konvex.

Durch eine geeignete Wahl der Mengeneinheiten beider Gütersorten kann immer erreicht werden, dass die Grenzrate der Substitution überall gleich

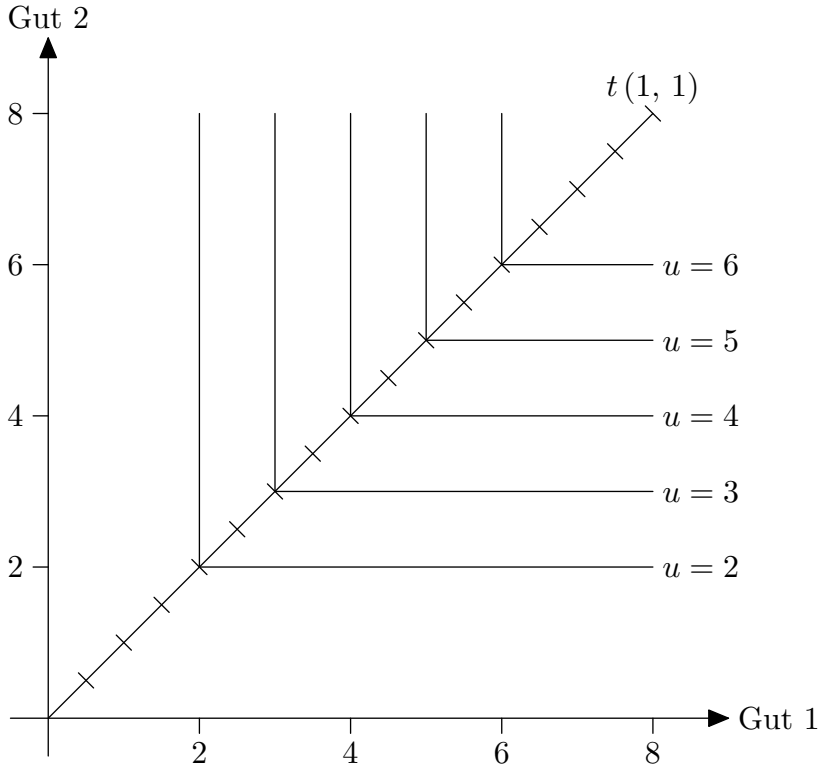
-1 ist. Man bezeichnet die beiden Güter in diesem Fall auch als perfekte Substitute.

2.5.3 Minimum-Nutzenfunktion

Die Minimum-Nutzenfunktion ist definiert als das Minimum $u = \min\{x_1, x_2\}$ der Komponenten eines Güterbündels.

Die Indifferenzkurven bilden in diesem Fall rechte Winkel entlang der ersten Winkelhalbierenden im Güterraum. Durch geeignete Wahl der Gütereinheiten lässt sich immer erreichen, dass der Eckpunkt auf der Winkelhalbierenden zu liegen kommt. Die Gestalt der Indifferenzkurven lässt sich

Abbildung 2.29: Indifferenzkurven der Minimum-Nutzenfunktion



folgendermaßen erklären: Betrachte ein Standard-Güterbündel, beispielsweise (3, 3). Der Nutzen ist gleich dem kleinsten Güterquantum einer Sorte, in diesem Fall sind beide Quanta gleich, also ist der Nutzen auch gleich 3. Wird nun eine Einheit der zweiten Sorte hinzugefügt, dann ändert sich der Nutzen nicht, denn das kleinere Güterquantum des Bündels (3, 4) bleibt 3.

Nur wenn beide Güterquanta vergrößert werden steigt auch der Nutzen. Man bezeichnet in diesem Fall die beiden Güter als perfekte Komplemente.

Auch bei perfekten Komplementen wird das Axiom der Nicht-Sättigung verletzt und die Indifferenzkurven sind auch nicht streng konvex.

2.5.4 Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

Die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion ist definiert als $u = x_1^\alpha x_2^\beta$, wobei die beiden Parameter α und β reelle Zahlen zwischen Null und Eins sind. Sie ist als Verallgemeinerung der Produkt-Nutzenfunktion aufzufassen. Das Besondere an ihr ist, dass sie in den Logarithmen der Güterquanta linear ist:

$$\ln u = \alpha \ln x_1 + \beta \ln x_2$$

Die Indifferenzkurven einer Cobb-Douglas sind streng konvex und nähern sich asymptotisch den Güter-Achsen. Aber auch bei der Cobb-Douglas Nutzenfunktion ist bei strenger Betrachtung das Axiom der Nicht-Sättigung verletzt.

2.5.5 CES-Nutzenfunktion

Die CES-Nutzenfunktion ist definiert als

$$u = \left[\alpha x_1^{-\beta} + x_2^{-\beta}\right]^{\frac{-1}{\beta}}$$

Ihren Namen verdankt sie der Eigenschaft konstanter Substitutionselastizität.[9] Die CES-Nutzenfunktion erfüllt bei geeigneter Wahl der beiden Parameter α und β alle Präferenz-Axiome. Weiter sind alle zuvor behandelten Nutzenfunktionen Sonderfälle der CES-Nutzenfunktion.

- Die Summe-Nutzenfunktion ergibt sich für $\alpha = 1$ und $\beta = -1$.
- Die Cobb-Douglas-Nutzenfunktion bzw. die Produkt-Nutzenfunktion ergibt sich für $\beta = 0$.
- Die Minimum-Nutzenfunktion ergibt sich für $\alpha = 1$ und $\beta \to \infty$.

[9] Das Konzept einer Elastizität und den Begriff der Substitutionselastizität werden wir erst im Rahmen der Vorlesung Mikroökonomik II besprechen.

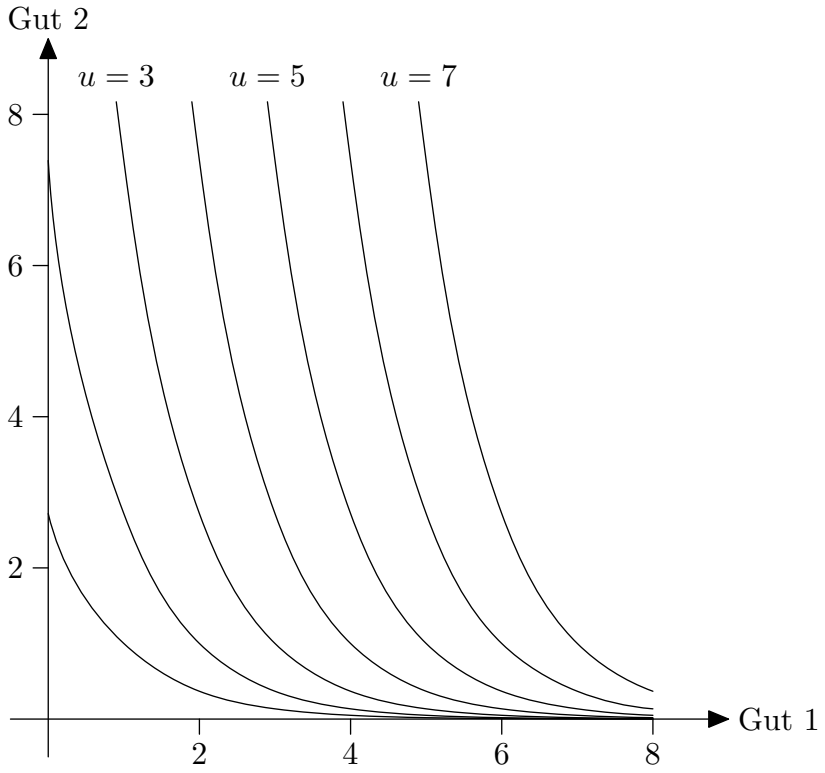
2.5.6 Quasi-lineare Nutzenfunktion

Der Begriff quasi-lineare Nutzenfunktion stammt aus dem Lehrbuch von Varian (1999, S. 58). Gemeint ist eine Nutzenfunktion, die anscheinend beinahe (aber nicht vollständig) linear ist. Der Begriff ist in hohem Maße irreführend, da eine Beziehung entweder linear oder aber nicht linear sein kann.[10] Eine quasi-lineare Nutzenfunktion ist definiert als

$$u = v(x_1) + x_2$$

wobei die Funktion v streng monoton in x_1 steigt.

Abbildung 2.30: Indifferenzkurven der quasi-linearen Nutzenfunktion



Die Besonderheit einer quasi-linearen Nutzenfunktion besteht darin, dass alle Indifferenzkurven durch eine vertikale (oder horizontale) Verlagerung aus einer einzigen Indifferenzkurve hervorgehen.

[10] Es gibt zwischen Linearität und Nicht-Linearität keine Übergangszone die von beidem ein wenig verkörpert. In der Mathematik wird der Schritt von der Linearität zur Nicht-Linearität sehr oft vollzogen, aber es ist immer ein ganzer Schritt und niemals ein gradueller Übergang.

Kapitel 3

Tausch und Markt

Märkte sind Orte, an denen getauscht wird. Sinnfälliges Beispiel dafür sind Wochenmärkte: Bauern, Metzger, Gärtner und viele weitere Sparten schlagen ihre Verkaufstände an einem zentralen Platz auf und die nahebei wohnenden Bürger kommen, um einzukaufen. In diesem Abschnitt soll geklärt werden, wie man sich ausgehend von einzelnen Tauschakten das Geschehen auf anonymen Märkten vorstellen kann.

Der Inhalt des Abschnittes ist zwar nicht klausurrelevant,[1] aber wir haben uns dennoch dazu entschlossen, den Tausch an dieser Stelle zu behandeln, denn

- der einfache Gütertausch kann unmittelbar am geometrischen Apparat des Güterraumes und der Indifferenzkurve — so wie im vorigen Abschnitt vorgestellt — ansetzen;
- aus dem einfachen Gütertausch kann mit dem einfachen Argument der Vervielfachung der Tauschpartner auf anonyme Märkte mit gleichgewichtigen Preisen geschlossen werden;
- ein Verständnis vom Marktgeschehen ist hilfreich bei der Erörterung der Marktnachfrage im nachfolgenden Abschnitt.

3.1 Vereinzelter Tausch

Betrachten wir zunächst einen einzelnen Akt des reinen Tausches. Es treten sich zwei Individuen A und B als Eigentümer von zwei unterschiedlichen

[1] Studierende, die bei strikter Beachtung des Minimal-Prinzips die Klausur mit minimalem Aufwand bestehen wollen (und nur das zählt im Grundstudium), können auf eigenes Risiko die Probe machen, ob sie den nächsten Abschnitt wirklich ohne die hier vermittelten Einsichten bewältigen können.

Warenkörben (Güterausstattungen) $a = (a_1, a_2)$ und $b = (b_1, b_2)$ gegenüber. Im Tausch gibt Person A einen Teil Δa_1 seines Besitzes von Gut 1 an Person B und erhält dafür ein gewisses Quantum Δb_2 des Gutes 2 von Person B.

Durch den Tauschakt wird A zum Eigentümer von $(a_1 - \Delta a_1, a_2 + \Delta b_2)$ und B wird Eigentümer von $(b_1 + \Delta a_1, b_2 - \Delta b_2)$. Wäre eine der Personen nicht Eigentümer, dann wäre es kein Tausch, sondern ein Akt der Hehlerei. Das Verhältnis, in dem die Waren ausgetauscht werden, ist zunächst noch völlig nebensächlich. Wesentlich ist nur, dass jeder die ausgetauschte Menge des anderen der eigenen gegenüber als äquivalent ansieht. Wäre es nicht so, dann wäre es kein seriöser Akt des Austauschens, sondern Betrug.

In *formeller* Hinsicht schafft der Tausch die Gleichheit. Zwischen den Individuen gibt es keinen formellen Unterschied, Gegensatz oder Verschiedenheit. Jedes ist ein austauschendes: ihre gesellschaftliche Beziehung ist die der Gleichheit. Die Waren, die ausgetauscht werden, sind zueinander äquivalent, sie gelten trotz ihrer Unterschiedlichkeit als Gleiche. Im Akt des Austauschens treten die Individuen zueinander in Kontakt als gleichberechtigte Besitzer von Gleichem und bewähren sich durch ihn hindurch als solche. Ihr sonstiger individueller Unterschied geht sie nichts an; sie sind gleichgültig gegen alle ihre sonstigen individuellen Eigenheiten.

Inhaltlich betrachtet bringt der Tausch die Freiheit der Individuen hervor. Wenn das Individuum A dasselbe Bedürfnis hätte wie das Individuum B und beide Besitzer derselben Gegenstände wären, hätte keiner ein Motiv zum Tausch. Die Verschiedenheit ihrer Bedürfnisse und ihres Besitzes gibt erst den Anlass zum Tausch. Das Individuum A ist Besitzer eines Gebrauchswertes für B und umgekehrt. „Dass dies Bedürfnis des einen durch das Produkt des anderen und vice versa befriedigt werden kann, und der eine fähig ist, den Gegenstand dem Bedürfnis des anderen zu produzieren und jeder dem anderen als Eigentümer des Objektes des Bedürfnisses des anderen gegenübersteht, beweist, dass jeder als Mensch über sein eigenes besonderes Bedürfnis übergreift, und dass sie sich als Menschen zueinander verhalten.“(Marx, 1953, S. 154) Keines der Individuen bemächtigt sich des fremden Eigentums mit Gewalt, jedes trennt sich freiwillig von seinem Eigentum. Jedes Individuum dient dem Bedürfnis des anderen nur, um sich selbst zu dienen. Diese Wechselseitigkeit ist eine notwendige Voraussetzung des Tausches, sie ist aber den Individuen gleichgültig. Das gemeinschaftliche Interesse, was als Motiv des Gesamtaktes erscheint, ist zwar von beiden Seiten anerkannt, aber als solches ist es nicht das Motiv. „Damit ist also die vollständige Freiheit des Individuums gesetzt: Freiwillige Transaktion; Gewalt von keiner Seite; setzen Seiner als Mittel, oder als dienend, nur als Mittel um sich als Selbstzweck, als das Herrschende und Übergreifende zu setzen; endlich das selbstsüchtige Interesse, kein darüberstehendes verwirklichend; der andere ist auch als ebenso sein

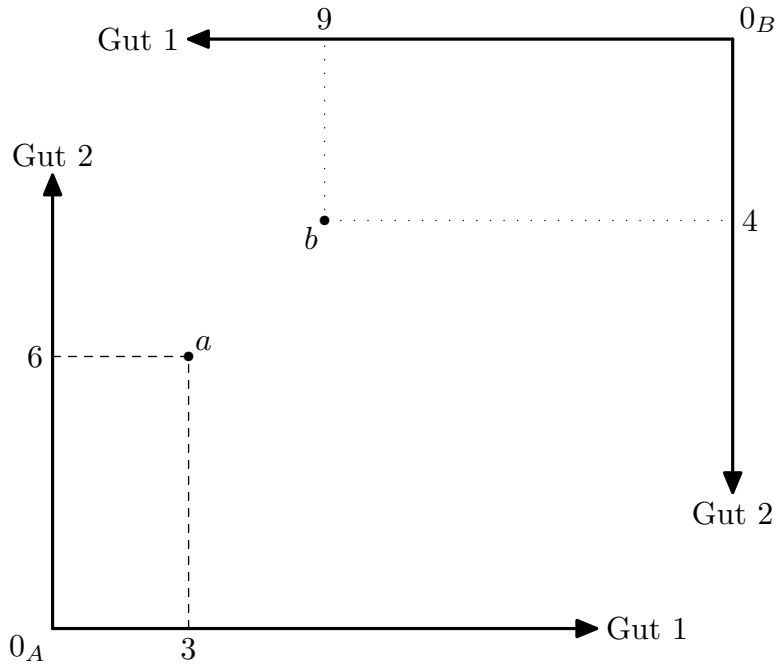
selbstsüchtiges Interesse verwirklichend anerkannt und gewußt.“(Marx, 1953, S. 156)

3.1.1 Die Edgeworth Box

Durch Tauschen wird die Verteilung der beiden Güter auf die beiden Personen verändert, wobei der gemeinsame Gütervorrat gleich bleibt. Aus Sicht der Person A handelt es sich um eine Verlagerung des Güterbündels (a_1, a_2) nach $(a_1 - \Delta a_1, a_2 + \Delta b_2)$. Diese Verlagerung ist, wie im vorigen Abschnitt ausführlich erläutert wurde, als ein Vektor mit dem Anfangspunkt (a_1, a_2) und der Richtung $(-\Delta a_1, \Delta b_2)$ im Güterraum der Person A aufzufassen. Gleiches gilt aus Sicht der Person B, wobei der Anfangspunkt durch (b_1, b_2) und die Richtung $(\Delta a_1, -\Delta b_2)$, also die zu A entgegengesetzte Richtung ist.

Mit Hilfe einer sogenannten Edgeworth Box lässt sich der Tausch zweier Güter geometrisch darstellen. Eine Edgeworth Box wird in zwei Schritten konstruiert. Erstens wird der Güterraum von Person B um 180° gedreht, dadurch wird die Richtung des Tausches von B dieselbe wie die von Person A. Die Anfangsausstattung der Person A und die weiteren Güterbündel, welche

Abbildung 3.1: Güterräume der Personen A und B

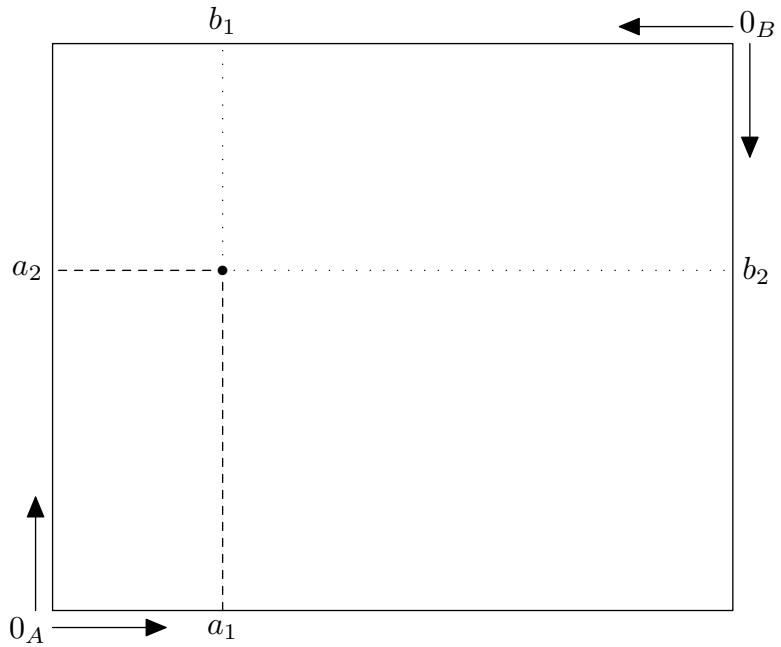


sie nach dem Tauschen besitzen mag, werden von 0_A aus nach rechts oben

gemessen. Die Anfangsausstattung der Person B, sowie ihr etwaiger Besitz nach dem Tausch wird von 0_B aus nach unten links gemessen. Was nun aus Sicht der Person A wie eine Vergrößerung der Menge von Gut 1 aussieht wird aus Sicht der Person B wie eine Verringerung des Besizes an Gut 1. Dasselbe gilt auch für Verlagerungen in jeder anderen Richtung.

Zweitens wird der Ursprung des Güterraumes von B so verschoben, dass sein Ausstattungspunkt (b_1, b_2) sich mit dem von Person A deckt, dadurch werden die Anfangspunkte der Umschichtungen gleich. Es entsteht ein Recht-

Abbildung 3.2: Edgeworth Box



eck, dessen Seitenlängen durch den gemeinsamen Gütervorrat $a + b$ gegeben sind. Die linke untere Ecke ist der Ursprung des Güterraumes von Person A und die rechte obere Ecke ist der Ursprung des gedrehten Güterraumes von Person B. Das Eigentum von Person A wird von ihrem Ursprung 0_A aus gemessen und das Eigentum von Person B von 0_B also von rechts oben aus. Ein Rechteck mit diesen beiden Messrichtungen ist die Edgeworth Box.

Alle Punkte innerhalb einer Edgeworth Box sind als zwei Güterbündel zu lesen: einmal vom Ursprung 0_A aus betrachtet als Eigentum der Person A und zum anderen vom Ursprung 0_B aus nach links unten betrachtet als Eigentum der Person B. Jeder Punkt im Inneren der Edgeworth Box zeigt somit eine Distribution einer sehr schlichten Volkswirtschaft an, die aus zwei

Personen besteht, die zwei verschiedene Gütersorten besitzen.

Punkte ausserhalb der Edgeworth Box sind unzulässig; sie können mit dem Gütervorrat $a + b$ der beiden Personen nicht als Distribution realisiert werden. Die Punkte innerhalb der Edgeworth Box sind zulässige Güterverteilungen. Der gesellschaftliche Gütervorrat könnte auch noch über den Privatbesitz $a + b$ hinaus öffentliches oder gemeinschaftliches Eigentum enthalten. In diesem Fall wären die Punkte innerhalb der Edgeworth Box immer noch zulässig, sie würden in der Summe aber geringer als der gesellschaftliche Gütervorrat sein. Eine zulässige Distribution ist also in der Summe immer kleiner oder gleich dem gesellschaftlichen Gütervorrat. Gibt es nur Privateigentum, dann ist die Summe einer zulässigen Distribution gleich dem gesellschaftlichen Gütervorrat. Da die private Nutzung von öffentlichem Eigentum besondere Probleme bereitet, wird unterstellt, dass es nur Privateigentum an den beiden Gütern gibt.

Durch Tauschen wird der gesellschaftliche Gütervorrat weder vergrößert noch verringert. M.a.W. Tauschen überführt eine zulässige Distribution in eine andere zulässige Distribution. Ein Tauschakt kann als eine Verlagerung von einem Punkt der Edgeworth Box zu einem anderen Punkt der Edgeworth Box dargestellt werden. Dieser Tauschakt lässt sich als Vektor in der Edgeworth Box mit einem bestimmten Anfangspunkt, einer Richtung und einer Länge (einem Ausmaß) darstellen, so wie im vorigen Abschnitt die Umschichtung eines Güterbündels als Vektor von einem Punkt zu einem anderen im Güterraum eines Konsumenten eingeführt wurde.

Der in Abbildung 3.2 eingezeichnete Punkt mit den Koordinaten (a_1, a_2) von 0_A aus betrachtet und den Koordinaten (b_1, b_2) von 0_B aus betrachtet, wird als Anfangsausstattung der beiden Personen bezeichnet. Ohne eine fest vorgegebene Anfangsausstattung[2] kann der Tausch nicht erklärt werden. Ob es zum Tausch kommt, und wohin er in der Edgeworth Box gegebenenfalls führt, hängt sowohl von der Erstausstattung als auch von den Präferenzen der beiden Personen A und B ab. Da beide freiwillig in den Tausch einwilligen müssen, wird er nur dann zustande kommen, wenn sich keiner der beiden schlechter stellt. Durch den Tausch wird weder Person A in die Schlechter-Menge von a, noch Person B in die Schlechter-Menge von b gelangen. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, dann wird es auch keinen Tausch geben und die Anfangsausstattung wird nicht verlassen. Daher wird die Erstausstattung auch als die Nicht-Tausch-Distribution bezeichnet.

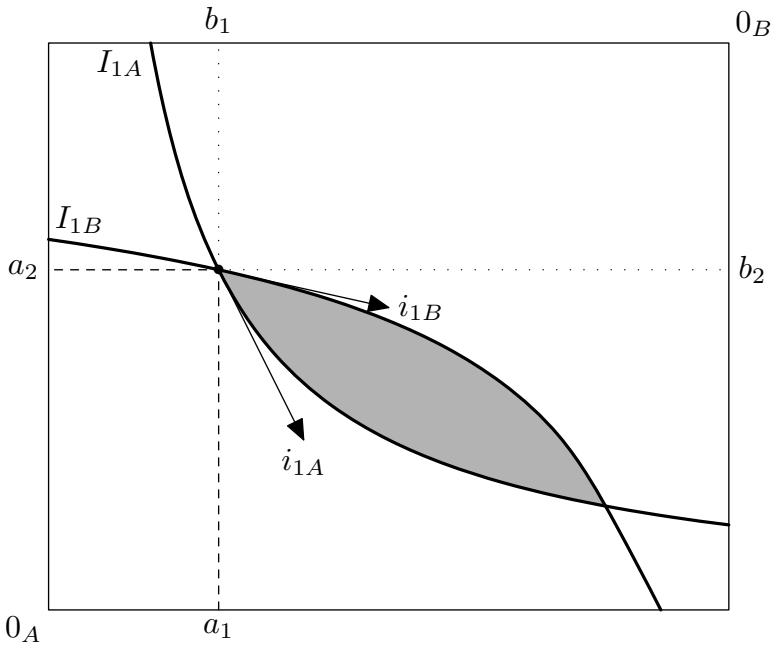
[2]Eine der großen, noch ungelösten Aufgaben der Gleichgewichtstheorie besteht darin, eine Erklärung für die Erstausstattung der Tauschpartner zu liefern und damit die Erstausstattung zu endogenisieren.

3.1.2 Der Verhandlungsspielraum

Die beiden Tauschpartner wollen sich durch Verhandlungen (Feilschen) auf einen Tausch einigen. Verhandlungsgegenstände sind Richtung und Ausmaß eines Tauschvektors. Der Anfangspunkt des Tauschvektors ist durch die Erstausstattung vorgegeben.

Durch die Anfangsausstattung verläuft die Indifferenzkurve I_{1A} von Person A und die Indifferenzkurve I_{1B} von Person B (man beachte, dass der Güterraum von B um 180° gedreht ist). Zwischen den beiden Indifferenzkur-

Abbildung 3.3: Gemeinsame Besser-Menge



ven befindet sich ein linsenförmiger Bereich von Distributionen, die sowohl zur Besser-Menge von a, als auch zur Besser-Menge von b gehören. Zählt man den durch die beiden Indifferenzkurven I_{1A} und I_{1B} gebildeten Rand noch dazu, dann ist die abgeschlossene linsenförmige Punktmenge diejenige, deren Elemente als Vorschläge beim Aushandeln in Frage kommen. Der Verhandlungsspielraum besteht somit aus all jenen Distributionen, bei denen sich keine der beiden Personen durch tauschen schlechter stellt als ohne tauschen. Die Distributionen im Inneren des Verhandlungsspielraumes stellen beide Personen besser als ihre Anfangsausstattung, die Punkte auf dem Rand hingegen stellen nur eine Person durch den Tausch besser, während die andere indifferent zwischen Tauschen und nicht Tauschen ist.

Alle Punkte ausserhalb der dunkel unterlegten „Linse“ des Verhandlungsspielraumes sind Distributionen, die beim Aushandeln nicht in Betracht kommen, da einer der beiden Tauschpartner nicht einwilligt. Man bezeichnet diese Distributionen als durch die gegebene Anfangsausstattung blockiert. Bezeichnet i_{1A} die Indifferenz-Richtung der Person A in ihrem Ausstattungspunkt a, dann wird sie nur dann in einen Tausch einwilligen, wenn die Tausch-Richtung größer als ihre Indifferenz-Richtung ist. Andererseits wird Person B nur dann einem Tausch zustimmen, wenn die Tauschrichtung kleiner als ihre Indifferenz-Richtung i_{1B} ist. Damit sind die Richtungen, die als Verhandlungsgegenstand in Frage kommen, begrenzt durch die Indifferenz-Richtungen der Erstausstattung. In welchem Ausmaß ein Tausch zu einer einmal festgelegten Tauschrichtung erfolgt, ist damit noch weitgehend offen und lässt einen großen Verhandlungsspielraum für die beiden Personen. Nur soviel ist sicher: der Vektor der Umschichtung muss in den dunkel unterlegten Bereich — in die „Linse“ — hineinführen oder zumindest auf dessen Rand.

Der Verhandlungsspielraum — die linsenförmige Menge von Distributionen in der Edgeworth Box — wird von den blockierten Distributionen abgegrenzt durch die beiden Indifferenzkurven, die durch die Anfangsausstattung verlaufen. Der Verhandlungsspielraum wird um so enger, je ähnlicher die Indifferenz-Richtungen der jeweiligen Distribution sind. Bei einem gegebenen Verhandlungsspielraum möchte Person A eine Tauschrichtung vereinbaren, die so nahe wie möglich an die Indifferenz-Richtung von Person B herankommt und Person B möchte gerade das Gegenteil erreichen. Auch was die Länge des Tauschvektors anbelangt, gibt es einen Verhandlungsspielraum, und einen gewissen Gegensatz der Interessen beider Tauschpartner, denn jeder möchte bei gegebener Tauschrichtung sich so positionieren, wie sich dies Gregor im vorigen Abschnitt überlegte. Beim Feilschen zweier Tauschpartner um Richtung und Ausmaß des Tauschvektors beeinflussen auch persönliche Merkmale wie Überzeugungskraft oder Verschlagenheit den Ablauf und das Ergebnis.

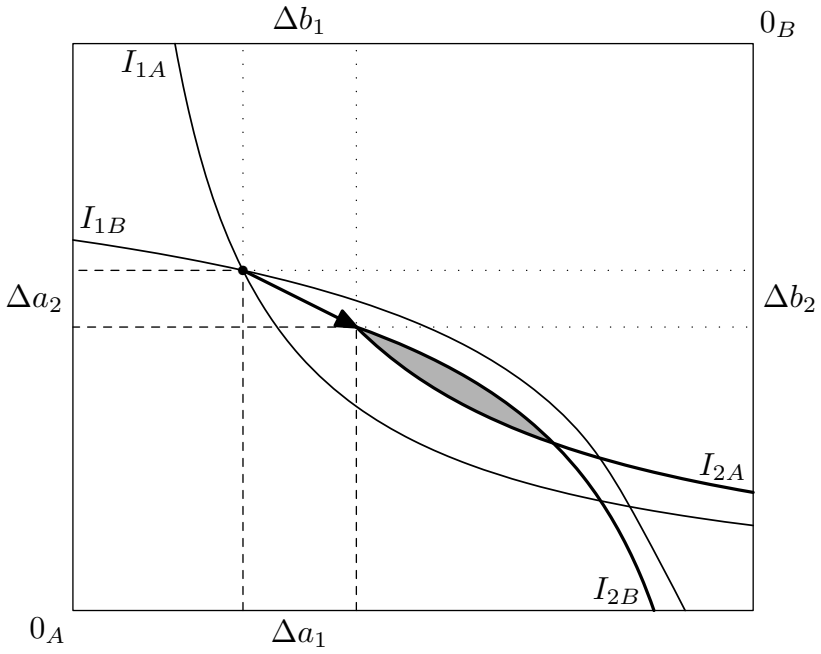
3.1.3 Verengung des Verhandlungsspielraums

Wir können uns die Verhandlungen über den Tauschvektor schrittweise vorstellen, wie es vor allem bei einem vereinzelten Tauschhandel zwischen zwei sich fremden Personen naheliegend ist. Angenommen die beiden Personen vereinbaren probeweise einen Handel so wie in der Abbildung 3.4 durch den Pfeil dargestellt. Durch die Pfeilspitze verläuft die Indifferenzkurve I_{2A}. Sie verläuft von 0_A aus gesehen weiter aussen in der Edgeworth Box und repräsentiert für Person A ein höheres Nutzenniveau als ihre Erstausstattung a. Analog verläuft durch die Pfeilspitze auch die Indifferenzkurve I_{2B}, die von

0_B aus gesehen ebenfalls weiter aussen in der Edgeworth Box verläuft und somit auch der Person B ein höheres Nutzenniveau als deren Erstausstattung b verschafft. Die vorgeschlagene Distribution würde beide besser stellen und findet daher auch von beiden Seiten Zustimmung.

Die probeweise Vereinbarung führt jedoch zu einer Distribution, die den Tauschpartnern noch weitere Nutzensteigerungen offen lässt. Die gemeinsame Besser-Menge dieser noch verbesserungsfähigen Distribution ist in der Abbildung 3.4 wieder dunkel unterlegt. Beide Tauschpartner können sich noch

Abbildung 3.4: Verschachtelte Linsen



besser stellen, indem sie beispielsweise die anfängliche Richtung beibehalten, aber das Ausmaß der Transaktion vergrößern. Da beide Personen sich nutzenmäßig noch besser stellen können, sind beide daran interessiert, von diesem Vorschlag abzuweichen. Das Verhandeln wird weitergehen, möglicherweise nicht nur über das Ausmaß, sondern auch über die Tauschrichtung. Der weitere Verhandlungsspielraum ist aber eingeschränkt.

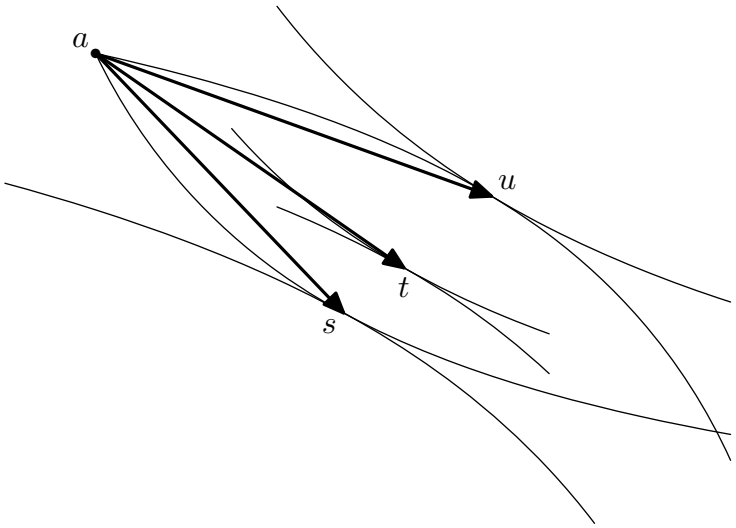
3.1.4 Tauschgleichgewichte

Erst wenn bei einer Distribution der Verhandlungsspielraum zu einem einzigen Punkt zusammengeschrumpft ist, wird es keine Verbesserungen für

beide Tauschpartner zugleich mehr geben und die Verhandlungen sind zu Ende. Wie die Verhandlungen im einzelnen ablaufen, wie viele und welche Zwischenstationen durchlaufen werden, ist nicht nachvollziehbar, wohl aber unter welcher Bedingung sie zu Ende sind.

Der Verhandlungsspielraum ist genau dann nur noch ein Punkt und damit ein Ende der Verhandlungen zwischen den Tauschpartnern erreicht, wenn sich eine Indifferenzkurve der Person A und eine der Person B an dieser Stelle berühren statt schneiden. Einen solchen Endzustand des Verhandelns bezeichnet man als ein Tauschgleichgewicht. In Abbildung 3.5 sind beispielhaft

Abbildung 3.5: Berührpunkte von Indifferenzkurven



drei solcher Tauschgleichgewichte s, t und u ohne die Zwischenschritte der Verhandlungen dargestellt. Im Punkt t berühren sich zwei Indifferenzkurven. Dies bedeutet, dass die Person A sich durchaus noch besser stellen könnte, aber nur noch zu Lasten von Person B. Da jedoch ein Tausch nur im beiderseitigen Einvernehmen zustande kommt, wird sich Person A mit der Distribution t zufrieden geben müssen. Gleiches gilt für Person B, auch sie könnte sich noch besser stellen, allerdings nur zu Lasten von Person A.

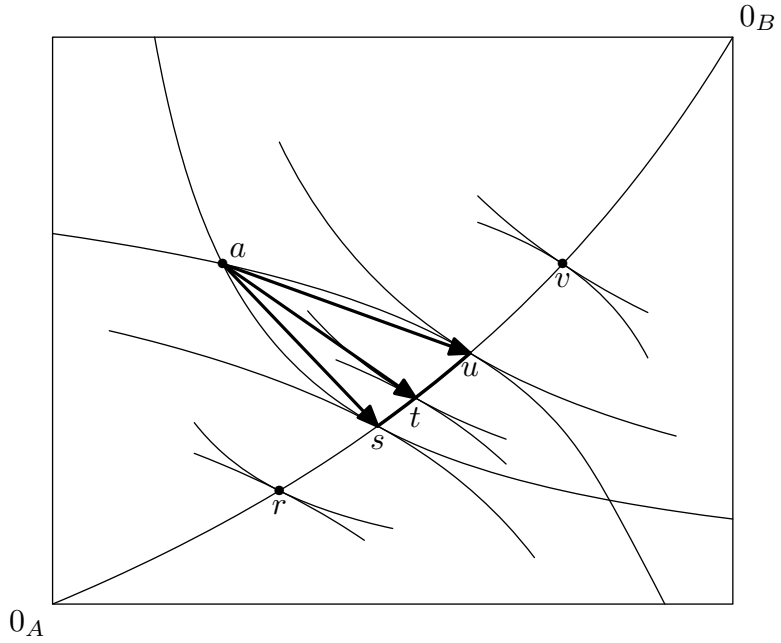
Die Distribution s ist ein Tauschgleichgewicht, bei dem nur die Person B einen größeren Nutzen als mit ihrer Erstausstattung hat, während Person A indifferent zwischen ihren beiden Güterbündeln ist. Auch u ist ein solches extremes Tauschgleichgewicht, allerdings mit vertauschten Rollen. Im nächsten Unterabschnitt wird gezeigt, dass sich bei mehr als zwei Tauschpartnern solche Extreme nicht mehr ergeben, also das besondere Verhandlungsgeschick

nicht mehr die Resultate der Verhandlungen so stark zu beeinflussen vermag wie im Falle zweier Tauschpartner.

3.1.5 Optimale Distributionen in der Edgeworth Box

Tauschgleichgewichte sind (Pareto-) optimal, denn wenn sich an einer Distribution die Indifferenzkurven der beiden Personen berühren, dann führt eine Umverteilung notwendigerweise dazu, dass eine der beiden Personen schlechter gestellt wird. Im ersten Kapitel wurde bereits das Kriterium für optimale Distributionen angesprochen, die nun für die Anwendung in einer Edgeworth Box präzisiert wird: Eine zulässige Distribution ist dann (Pareto-) optimal, wenn es keine weitere zulässige Distribution mehr gibt, die mindestens einen Tauschpartner besser stellt, ohne den anderen zu schädigen. Eine optimale Distribution in der Edgeworth Box ist dadurch gekennzeichnet, dass sich an diesem Punkt eine Indifferenzkurve von Person A und eine von Person B berühren. Der Verhandlungsspielraum ist auf einen Berührpunkt zweier Indifferenzkurven geschrumpft.

Abbildung 3.6: Kontraktkurve und Kern



Der geometrische Ort aller Berührpunkte beider Scharen von Indifferenzkurven heißt Kontraktkurve. Der Teil der Kontraktkurve, der bei einer gegebenen Erstausstattung durch die Linse des Verhandlungsspielraums verläuft,

heißt Kern. Der Kern ist somit die Menge aller (Pareto-) optimalen Distributionen, die bei einer bestimmten Anfangsausstattung *nicht blockiert* werden. Der Tausch wird zu einer Distribution im Kern führen.

Die Distributionen r, s, ..., v in Abbildung 3.6 liegen alle auf der Kontraktkurve. Die Distributionen s, t und u sind Elemente des Kerns zur Anfangsausstattung a. Die für beide Tauschpartner jeweils gleiche Indifferenz-Richtung bei den Distributionen im Kern ist im Allgemeinen nicht gleich der Tauschrichtung, die vom Ausstattungspunkt a zu diesem Punkt führt, beispielsweise von a nach s, wie man in Abbildung 3.6 ebenfalls mit bloßem Auge erkennt.

3.2 Tausch zwischen vielen Tauschpartnern

Bei nur zwei Tauschpartnern gibt es noch einen großen Verhandlungsspielraum. Nun wird gezeigt, dass dieser Verhandlungsspielraum — und der Kern — um so kleiner wird, je mehr Tauschpartner ins Spiel kommen, bis er im Falle beliebig vieler Tauschpartner auf einen einzigen Punkt zusammenschrumpft. Diese besondere Distribution wird dann als Walras-Gleichgewicht oder Konkurrenz-Gleichgewicht bezeichnet.

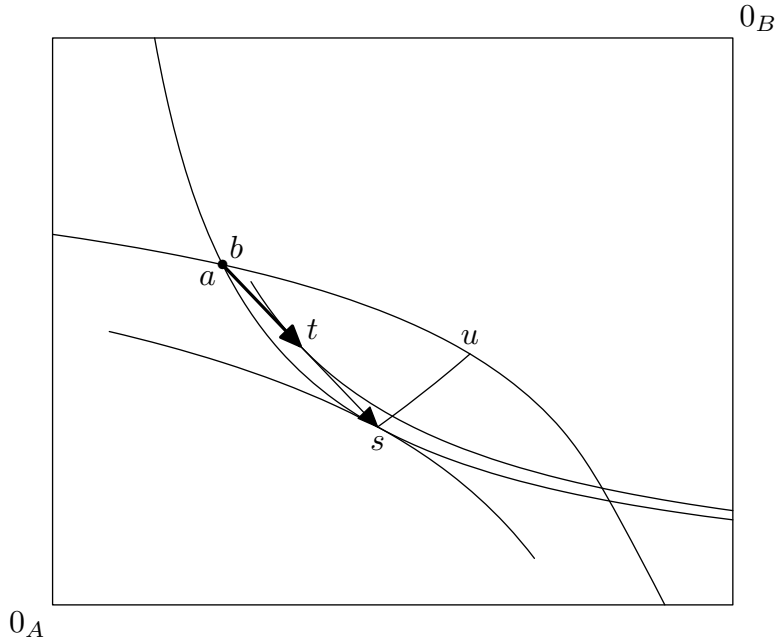
3.2.1 Koalitionen

Um die Auswirkung einer vergrößerten Anzahl von Tauschpartnern zu untersuchen, bedienen wir uns eines einfachen Kunstgriffes: die Bevölkerung, die bisher aus den Personen A und B mit der Erstausstattung a und b, sowie den Präferenzen wie sie in den vorigen Edgeworth Boxen dargestellten Indifferenzkurven zum Ausdruck kommen, wird identisch reproduziert. Statt einer Person A gibt es nun zwei, mit denselben Erstausstattungen und Präferenzen und statt einer Person B gibt es ebenfalls zwei. Dadurch können die Überlegungen anhand von Edgeworth Boxen des vorigen Unterabschnitts direkt fortgeführt werden.

Angenommen die beiden As besitzen zu Beginn jeweils ein Güterbündel $a = (3, 6)$ und die beiden Bs besitzen jeweils ein Güterbündel $b = (9, 4)$. Weiter wird unterstellt, dass eine Person A mit einer Person B tauscht, sodass sich die Distribution $s_A = (6, 3)$ aus Sicht von 0_A und $s_B = (6, 7)$ aus Sicht von 0_B ergibt. Es wird weiter unterstellt, dass eine Person A zwischen ihrer Angangsausstattung und dem Güterbündel s_A indifferent ist. Durch den Tausch erfahren also annahmegemäß nur die Bs eine Verbesserung, während die beiden As durch den Tausch keine Besserstellung, sondern lediglich Indifferenz erfahren.

In dieser Situation können sich die beiden As zu einer Koalition mit nur einem B zusammenschließen, indem sie folgendes Angebot unterbreiten: Wir beide tauschen nur mit dir und zwar jeweils die Hälfte der vorigen Mengen. Dadurch wird der Koalitionspartner der beiden As genauso gut gestellt wie beim vorigen Tausch mit einem A alleine. Er besitzt nach dem Tausch das Güterbündel $s_B = (6, 7)$. Die beiden As stellen sich hingegen beim Güter-

Abbildung 3.7: Koalition der beiden As mit einem B

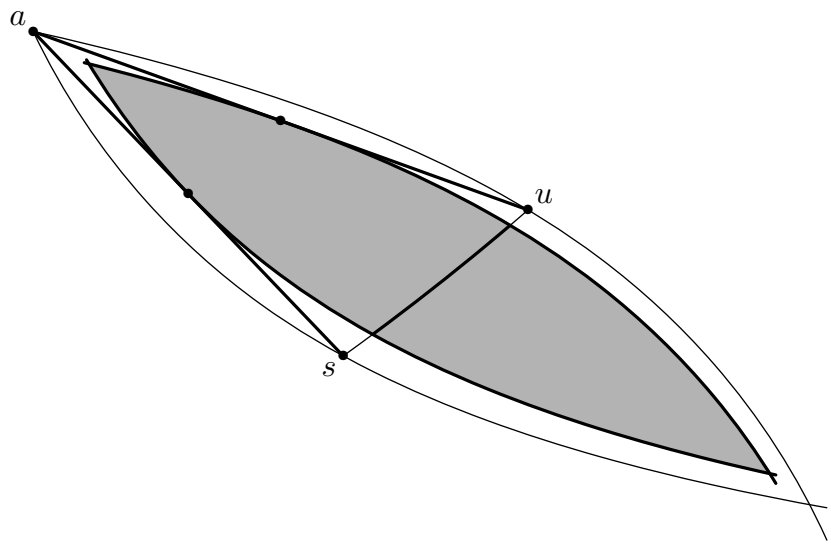


bündel $t = (4.5, 4.5)$ eindeutig besser. Eine Person B geht dabei leer aus, sie findet keinen Tauschpartner und besitzt nach wie vor ihre Erstausstattung $b = (9, 4)$. Die beiden As haben einen Anreiz, sich mit einem B zusammen zu tun, denn die Nutzenniveaus innerhalb der Koalition stellen eine Pareto-Verbesserung gegenüber der Situation ohne Koalition dar.

Da jede Person freiwillig am Tausch teilnimmt, kann die Koalition mehr Distributionen blockieren als eine Person alleine. Der Kern wird durch diese Koalition verkleinert, denn wenn die leer ausgegangene Person B am Tausch teilnehmen will, dann muss sie einer Person A einen Handel vorschlagen, der ihr mindestens das Nutzenniveau wie das Güterbündel t bietet. Ganz analog kann in Bezug auf die Distribution u argumentiert werden, wenn eine Koalition der beiden Bs mit einem A betrachtet wird. Der Kern der Zwei-Personen-Wirtschaft wird von beiden Seiten her durch Koalitionen beschnitten.

Bei nur zwei Tauschpartnern hat Person A keine Möglichkeit, das Angebot von Person B abzulehnen, von a nach s zu tauschen, d.h. drei Einheiten des Gutes 1 gegen drei Einheiten des Gutes 2 zu tauschen. Wenn Person A,

Abbildung 3.8: Koalitionen verkleinern Verhandlungsspielraum und Kern



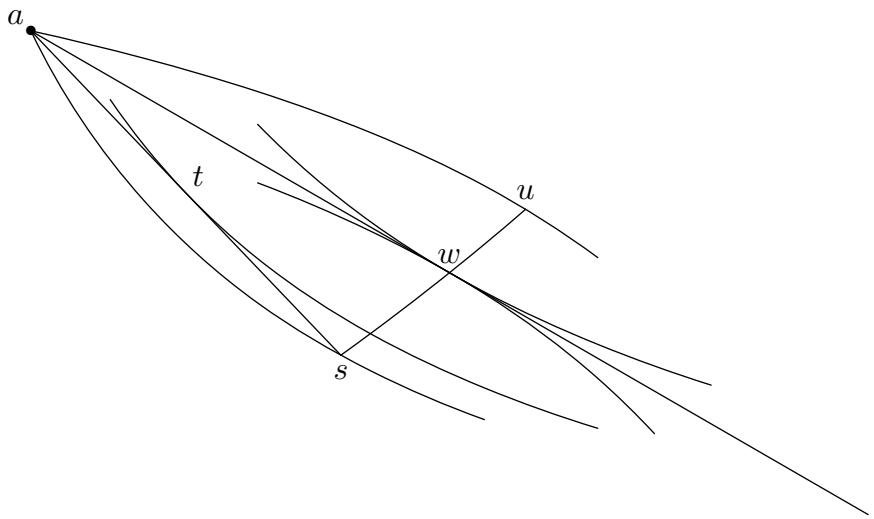
so wie eingangs dargelegt, nur ihr eigenes Wohlergehen beachtet und man von Neid oder Ähnlichem absieht, ist sie zwischen den Güterbündeln $a = (3, 6)$ und $s = (6, 3)$ indifferent und ihr stehen sonst keine Alternativen zur Verfügung. Erst wenn es noch eine zweite Person A gibt, lässt sich die Tausch-Richtung beibehalten und dennoch das Ausmaß, in dem getauscht wird verringern, sodass die beiden Personen A in der Mitte der Sekante einer Indifferenzkurve von a nach s — bei t — also in der Besser-Menge von a landen. Die Drohung, eine Koalition zu bilden, ist glaubwürdig und blockiert schon zu Beginn der Verhandlungen Distributionen, die ohne Koalition zum Verhandlungsspielraum gehörten. Aber auch in der vergrößerten Wirtschaft wird der Verhandlungsprozess zu einer Distribution im nunmehr verkleinerten Kern führen.

Angenommen, die Bevölkerung wird nochmals identisch reproduziert, was zu vier Personen des Typs A und ebenfalls vier Personen des Typs B führt. Auch in dieser Wirtschaft wird der Kern gegenüber der mit der halben Anzahl von Personen nochmals verkleinert, wie anhand derselben Argumentation wie im vorigen Fall nachvollziehbar ist. Die Anzahl der möglichen Koalitionen steigt auf acht, was die Verhandlungen und Koalitionsbildungen zum Blockieren von Distributionen zu einem aufwendigen Verfahren macht.

3.2.2 Das Walras-Gleichgewicht

Wird nun die Bevölkerung durch identische Reproduktion immer weiter vergrößert, dann bleibt nach dem Grenzübergang auf eine unendliche Anzahl (von der die Hälfte vom Typ A und die andere Hälfte vom Typ B ist) genau eine Distribution als Kern übrig. Diese bezeichnet man als Walras-Gleichgewicht. Der formale Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit würde an dieser Stelle zu weit führen. Wir beschränken uns daher auf eine Plausibilitätsbetrachtung. Die schrittweise Verkleinerung des Kerns kommt da-

Abbildung 3.9: Tauchrichtung gleich Indifferenz-Richtung



durch zustande, dass Koalitionen gebildet werden können, die immer mehr des Kerns der $2n$-Personen-Wirtschaft blockieren. Dies ist möglich, weil innerhalb einer Koalition ein Teil der Gruppe lediglich die Hälfte eines vorgegebenen Tauschvektors in den Handel einzubringen braucht, wie beispielsweise statt $s - a$ nur die Hälfte $t - a$. Die Vorteilhaftigkeit ergibt sich aus dem streng konvexen Verlauf der Indifferenzkurven: der Vektor $s - a$ bildet eine Sekante mit der Indifferenzkurve durch den Punkt s im Kern und auf der Sekante liegen Güterbündel, welche Personen vom Typ A höher bewerten als die beiden Endpunkte. Die Koalitionsbildung ist also nur dann sinnvoll, wenn der Tauschvektor mit Spitze im Kern eine Sekante bildet mit der Indifferenzkurve, die dort durch den Kern verläuft.

Nun bildet aber der Tauschvektor $w - a$ keine Sekante, sondern verläuft tangential zu den Indifferenzkurven an seiner Spitze. Hier kommt die zweite wesentliche Eigenschaft konvexer Kurven zum Tragen: Tangenten verlaufen

immer unterhalb einer konvex gekrümmten Indifferenzkurve. Eine Verkleinerung des Vektors $w - a$ führt also immer in die Schlechter-Menge von w, und zwar sowohl aus Sicht einer Person vom Typ A als auch aus Sicht (von rechts oben) einer Person des B-Typs. Die Distribution w wird durch keine Koalition blockiert. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass der Tauschvektor im Kern tangential zu den beiden (sich dort berührenden) Indifferenzkurven verläuft.

Auch das Walras-Gleichgewicht ist wie jedes andere Tauschgleichgewicht (Pareto-) optimal. Diese schlichte Aussage ist unter dem Namen *erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie* bekannt.

Das Ergebnis dieses Unterabschnitts: die Existenz und Eindeutigkeit sowie die Optimalität eines Tauschgleichgewichtes in einer Wirtschaft mit zwei Typen von Tauschpartnern und unendlich vielen Personen beider Typen und zwei Güterarten lässt sich in mehreren Richtungen verallgemeinern. Es gilt auch dann, wenn mehr als zwei Gütersorten vorkommen und wenn mehr als zwei Typen von Tauschpartnern vorkommen. Allerdings muss immer die Anzahl der Tauschpartner beliebig groß sein.

3.3 Vom Realtausch zu anonymen Märkten

Zwar kann die Existenz eines Walras-Gleichgewichts auch bei einer sehr großen Zahl unterschiedlicher Güter und ganz individuellen Tauschpartnern nachgewiesen werden, aber damit ist den tauschwilligen Personen noch kein praktikabler Weg aufgezeigt, wie ihre Transaktionen abzuwickeln sind. Der direkte Gütertausch wird bei vielen Gütersorten und unter vielen unterschiedlichen Personen vor allem durch die Unübersichtlichkeit der Tauschverhältnisse und die Seltenheit eines geeigneten Tauschpartners behindert.

Je mehr Gütersorten ausgetauscht werden sollen, desto mehr Austauschverhältnisse sind zu beachten. Bei zwei Gütersorten gibt es ein Tauschverhältnis, bei drei Gütersorten sind die zwischen Gut 1 und 2, zwischen Gut 1 und 3, sowie zwischen Gut 2 und 3 zu unterscheiden. Bei N Gütersorten gibt es insgesamt $N(N-1)/2$ Tauschverhältnisse. Bereits bei zehn verschiedenen Gütersorten hat man 45 verschiedene Tauschverhältnisse zu unterscheiden und diese müssen obendrein noch untereinander konsistent sein, um Tauschgewinne aus Dreiecksgeschäften (Arbitrage) zu verhindern.

Ein zweites Hindernis besteht darin, geeignete Tauschpartner zu finden. Eine andere Person ist nur dann ein geeigneter Tauschpartner, wenn sie die Gütersorte hergeben will, die man selbst gerne eintauschen würde und umgekehrt muss diese Person auch gerade jene Gütersorte begehren, die man selbst zum Austausch anbietet. Wenn es N verschiedene Güter und M unter-

schiedliche Personen (was Erstausstattung und Präferenzen anbelangt) gibt, dann ist die Wahrscheinlichkeit für jemanden, zufällig die Person zu treffen, mit der man direkt die Güter austauschen kann, etwa $(MN)^{-1}$, also bei zehn Gütern und hundert Personen etwa so groß wie die, einen Vierer im Lotto[3] zu tippen.

Die Verwendung von Geld[4] verringert maßgeblich beide Hindernisse.

Werden die Tauschrichtungen aller Gütersorten einheitlich in Bezug auf Geld angegeben, dann benötigen die Tauschpartner bei N Gütern — ohne Geld als eine besondere Ware dazuzuzählen — bei ihren Planungen auch nur N Tauschrichtungen. Etwaige Arbitragemöglichkeiten lassen sich dadurch relativ einfach aufdecken und beseitigen, sodass durchs Tauschen alleine keine Besitzvermehrung bei einer Person und Eigentumsverluste in gleicher Höhe bei anderen auftreten können. Das Geld dient als eine Recheneinheit und die Tauschrichtung in Bezug auf Geld nennt man (Geld-) Preisvektor. Jede Komponente eines Preisvektors gibt an, gegen wieviel Geldeinheiten die betreffende Gütersorte einzutauschen ist. Geld muss nicht tatsächlich vorhanden sein, um seine Funktion als Recheneinheit zu vollziehen. Dies ist bei der zweiten Geldfunktion — der Tauschmittel-Funktion — anders.

Wenn Geld als ein Tauschvermittler eingesetzt wird, zerfällt jeder Realtausch in die beiden Akte Kauf und Verkauf. Diese lassen sich sachlich, räumlich und zeitlich voneinander getrennt durchführen. Was vorher ein einziger direkter Realtausch der beiden Güter 1 und 2 zwischen den Personen A und B war, wird nun in zwei getrennte Transaktionen aufgespalten: Person A kauft das Gut 2 von Person B, d.h. Person A bezahlt der Person B einen bestimmten Geldbetrag und erhält dafür ein bestimmtes Quantum von Gut 2. Die Person B ist danach Geldbesitzer und kann ihrerseits als Käufer eines der vielen Güter auftreten. Dieser Kauf kann mit einer dritten Person, an einer anderen Stelle sowie zu einem späteren Zeitpunkt erfolgen.

Was sich vorher beim Realtausch vieler Güter zwischen vielen Individuen

[3] Die exakte Wahrscheinlichkeit für den Vierer im Lotto 6 aus 49 beträgt 0.000969 und ist daher um 3.2% kleiner als 0.001.

[4] An dieser Stelle müsste eigentlich eine Auseinandersetzung mit der Wertform-Analyse von Marx erfolgen:

> Hier gilt es jedoch zu leisten, was von der bürgerlichen Ökonomie nicht einmal versucht ward, nämlich die Genesis dieser Geldform nachzuweisen, also die Entwicklung des im Wertverhältnis der Waren enthaltenen Wertausdrucks von seiner einfachsten unscheinbarsten Gestalt bis zur blendenden Geldform zu verfolgen.(Marx, 1974, S. 62)

Die Darstellung bei Marx ist, wie selbst Kenner einräumen, einer der schwierigsten Abschnitte seines Werkes. Seine voranstehende Äußerung trifft auch heute noch zu. Es gibt noch keine harte, gleichgewichtstheoretische Begründung des Geldes.

als eine amorphe Masse höchst unterschiedlicher Tauschakte darstellt, kann nunmehr einfach in einzelne Märkte für jede Gütersorte gegliedert werden. Auf jedem Gütermarkt gibt es auf der einen Seite klar identifizierbare Käufer — die Nachfrager — Personen, die Geld anbieten, um in den Besitz des betreffenden Gutes zu kommen, auf der anderen Seite gibt es die Verkäufer — die Anbieter — Besitzer des Gutes, die es gegen Geld eintauschen wollen. Den Gütermärkten steht ein Geldmarkt gegenüber, jeder Güterkauf und -verkauf ist zugleich auch Angebot und Nachfrage nach Geld. Das Geld ist ein besonderer Stoff, es wird nicht um seiner selbst angeboten und nachgefragt, sondern nur zum Zwecke des Verkaufens oder Kaufens. Seine Nützlichkeit beschränkt sich darauf, Tauschmedium und Wertmaßstab der Güter zu sein und dadurch den Aufwand der Tauschpartner gering zu halten.

Der geldvermittelte Tausch auf Märkten ist eine Institution, die es den Menschen gestattet, ihren Besitz mit vertretbarem Aufwand umzuschichten. Die Suche nach einem geeigneten Tauschpartner wird durch die Vereinheitlichung der jeweiligen Marktseite ersetzt. An die Stelle von Verhandlungen über die Tauschvektoren treten Verhandlungen über Preise — Geldbeträge, die der Käufer zu zahlen bereit ist und welche der Verkäufer als angemessen betrachtet.

3.3.1 Verhaltensmuster der „Mengenanpassung“

Kehren wir nun zurück zu der Wirtschaft mit zwei Gütersorten und zwei Typen von Personen und unterstellen zusätzlich Märkte für die beiden Gütersorten und die allgemeine Verwendung von Geld als Tauschmedium und als Recheneinheit. Die Geldeinheiten sind die allseits geschätzten Euros (€).

Anhand eines ganz anderen Verhaltensmusters, der sogenannten „Mengenanpassung“ an einen fest vorgegebenen Preisvektor, wird nun gezeigt, dass sich bei beliebiger Anzahl der Tauschpartner ebenfalls das Walras-Gleichgewicht einstellt. Dies ist das typische Verhalten auf anonymen Märkten und kann somit interpretiert werden als jenes, das sich beim einfachen Realtausch beim Grenzübergang auf unendlich viele Tauschpartner einstellt.

Bei einer sehr großen Anzahl von Tauschpartnern kann das Aushandeln des Tauschvektors bzw. des Preisvektors und der auszutauschenden Mengen durchaus zum Verhandlungsmarathon werden. Dazu kommt, dass der Verhandlungsspielraum und der Einfluss eines Einzelnen auf den Verhandlungsprozess um so geringer, je größer die Anzahl der Tauschpartner ist. Daher wird manch einer auf die Idee kommen, sich am Verhandlungsprozess nicht zu beteiligen, sondern einfach sein Ergebnis abwarten. Wenn sich aber alle so verhalten, dann gibt es gar keine Verhandlungen mehr und die

Preisbildung muss auf andere Art[5] erklärt werden. Dieses Abwarten, bis sich — auf irgendeine ungeklärte Weise — ein ganz bestimmter Preisvektor herausgeschält hat, wird als Mengenanpassung oder auch als wettbewerbliches Verhalten oder auch als Konkurrenzverhalten bezeichnet.[6]

Angenommen, es gibt sehr viele Personen des Typs A und B. Ihnen ist lediglich ein bestimmter Preisvektor $p = (p_1, p_2)$ der beiden Gütersorten bekannt und alle verhalten sich als Mengenanpasser. Statt in einen Verhandlungsmaraton einzutreten, überlegt sich jede ganz für sich alleine, ob sie bei diesem Austauschverhältnis mehr von Gut 1 haben möchte, als sich in ihrer Anfangsausstattung befindet oder ob sie davon weniger haben möchte. Im ersten Fall ist die Person Nettonachfrager nach Gut 1 und im zweiten Fall Nettoanbieter von Gut 1. Dieselbe Überlegung wird auch bei Gut 2 angestellt, wobei hier jedoch die Rollen von Nettoanbieter und Nettonachfrager vertauscht sind. Niemand wird bei beiden Gütern Nettoanbieter sein auf Grund der unterstellten Nicht-Sättigung. Niemand wird andererseits nur Nettonachfrager sein können, denn jeder muss, um in den Mehrbesitz von Gut i zu gelangen, ein gewisses Quantum von Gut j hergeben.

3.3.2 Preisvektor, Tauschrichtung und Budgetgerade

Beim zuvor diskutierten Verhandlungsprozess war der Verhandlungsgegenstand ein Tauschvektor, dessen Anfangspunkt fest vorgegeben war. Daher standen seine Richtung und Länge zur Disposition. Jetzt soll neben der Erstausstattung ($a = (a_1, a_2)$ für Personen vom Typ A und $b = (b_1, b_2)$ für solche vom Typ B) ein Preisvektor $p = (p_1, p_2)$ fest vorgegeben sein und jede Person überlegt für sich alleine, welche Gütermengen sie dabei auszutauschen bereit ist.

Die erste Komponente des fest vorgegebenen Preisvektors, p_1, benennt den Geldbetrag, der beim Kauf einer Einheit von Gut 1 zu entrichten ist, bzw. der beim Verkauf eingenommen wird; genauso ist der Preis p_2 als ein bestimmter Geldbetrag pro Einheit von Gut 2 zu behandeln. Die Preise sind positive, dimensionsbehaftete reelle Zahlen. Ihre Dimensionen sind

$$\frac{€}{\text{Gut 1}} \quad \text{und} \quad \frac{€}{\text{Gut 2}} .$$

[5] Wir werden ganz am Ende der Mikro-Kurse auf den sogenannten walrasianischen Auktionator zu sprechen kommen, der eine Alternative Erklärung bietet.

[6] Alle diese Bezeichnungen sind als reine Fachbegriffe aufzufassen, denn im alltäglichen Sprachgebrauch haben Wettbewerb und Konkurrenz eine ganz andere Bedeutung, die weit entfernt von der den Fachbegriffen anhaftenden Passivität ist. Auch der Begriff Mengenanpassung ist mehrdeutig, nachdem wir wissen, dass der Tauschvektor einen Anfang, eine Richtung und eine Länge hat.

Durch den Preisvektor ist zugleich eine ganz bestimmte Tauschrichtung gegeben. Eine Einheit des Gutes 1 ist soviel wert wie p_1 Geldeinheiten und eine Einheit des Gutes 2 ist soviel wert wie p_2 Einheiten. Also ist eine Geldeinheit soviel wert wie $1/p_1$ Einheiten der Gütersorte 1 und $1/p_2$ Einheiten der Gütersorte 2. Da im Tausch Gleiches mit Gleichem vergolten wird, muss die Tauschrichtung

$$\left(\frac{1}{p_1},\, \frac{-1}{p_2}\right)$$

lauten. Es kommt nur auf die Richtung dieses Vektors an, nicht auf seine Länge, daher sind auch beliebige Vielfache — auch mit negativen reellen Zahlen — erlaubt, nur nicht das Nullfache. Der Preisvektor $p = (p_1,\, p_2)$ besagt also, dass im Realtausch sich $1/p_1$ des Gutes 1 gegen $1/p_2$ des Gutes 2 tauschen, denn beides stellt denselben Geldbetrag dar. Damit ist die ganz bestimmte — für alle verbindliche — Richtung vorgegeben, wie Güterbündel durch Kaufen und Verkaufen umgeschichtet werden können. Insgesamt sind der Anfang und die Richtung eines Tauschvektors gegeben durch die Erstausstattung und den Preisvektor. Nur noch die Länge des Tauschvektors ist privat dezentral zu planen. Tauschrichtung und Preisvektor sind orthogonal.

$$(p_1,\, p_2) \cdot \left(\frac{1}{p_1},\, \frac{-1}{p_2}\right) = \frac{p_1}{p_1} - \frac{p_2}{p_2} = 1 - 1 = 0$$

Eine Person vom Typ A mit der Erstausstattung $a = (a_1,\, a_2) = (3,\, 6)$ kann sie somit durch Tauschen in jedes Güterbündel $(x_1,\, x_2)$ umschichten, das der Punkt-Richtungs-Form

$$(x_1,\, x_2) = (a_1,\, a_2) + t\left(\frac{1}{p_1},\, \frac{-1}{p_2}\right)$$

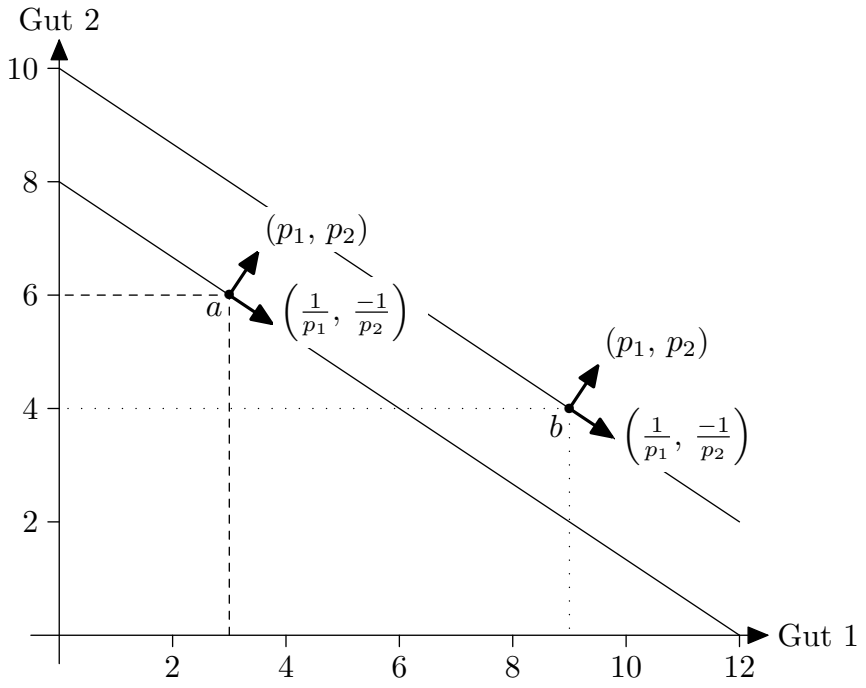
genügt. Der Parameter t ist eingeschränkt auf jene reelle Zahlen, die Güterbündel $(x_1,\, x_2)$ mit nicht-negativen Komponenten ergeben. Die Punkt-Richtungs-Form beschreibt eine Gerade, die im Güterraum der Person A durch ihre Anfangsausstattung $(a_1,\, a_2)$ mit der Tauschrichtung $\left(\frac{1}{p_1},\, \frac{-1}{p_2}\right)$ verläuft. Sie wird als Budgetgerade (einer Person vom Typ A) bezeichnet. Der Preisvektor steht senkrecht auf dieser Budgetgeraden.

Auch eine Person vom Typ B kann ihre Erstausstattung $b = (b_1,\, b_2) = (9,\, 4)$ durch Kaufen und Verkaufen in jedes Güterbündel $y = (y_1,\, y_2)$ umschichten, das auf ihrer Budgetgeraden

$$(y_1,\, y_2) = (b_1,\, b_2) + t\left(\frac{1}{p_1},\, \frac{-1}{p_2}\right)$$

liegt. Die Budgetgerade einer Person vom Typ B verläuft im Güterraum und in der Edgeworth Box parallel zur Budgetgeraden einer Person vom Typ A, allerdings durch ihren Ausstattungspunkt b.

Abbildung 3.10: Budgetgeraden der Personen vom Typ A und B



Durch Subtraktion der Erstausstattung links und rechts in der Punkt-Steigungs-Form ergibt sich dieselbe Budgetgerade. Beispielsweise bei einer Budgetgeraden einer Person vom Typ A gilt:

$$\begin{aligned} t\left(\frac{1}{p_1}, \frac{-1}{p_2}\right) &= (x_1, x_2) - (a_1, a_2) = (x_1 - a_1, x_2 - a_2) \\ &= (x_1 - 3, x_2 - 6) \end{aligned}$$

wobei die neuen Variablen $x_i - a_i$ allgemein als Überschussnachfrage einer Person vom Typ A nach Gut i bezeichnet werden (im Falle eines negativen Zahlenwertes handelt es sich um ein Nettoangebot). Die linke Seite der neuen Budgetgleichung gibt ein Vielfaches der vorgegebenen Tauschrichtung an, die rechte ist der Vektor der Überschussnachfragen beider Güter. Wird mit dem dazu orthogonalen Preisvektor (p_1, p_2) multipliziert, ergibt sich

$$0 = (p_1, p_2) \cdot (x_1 - a_1, x_2 - a_2) = p \cdot [x - a]$$

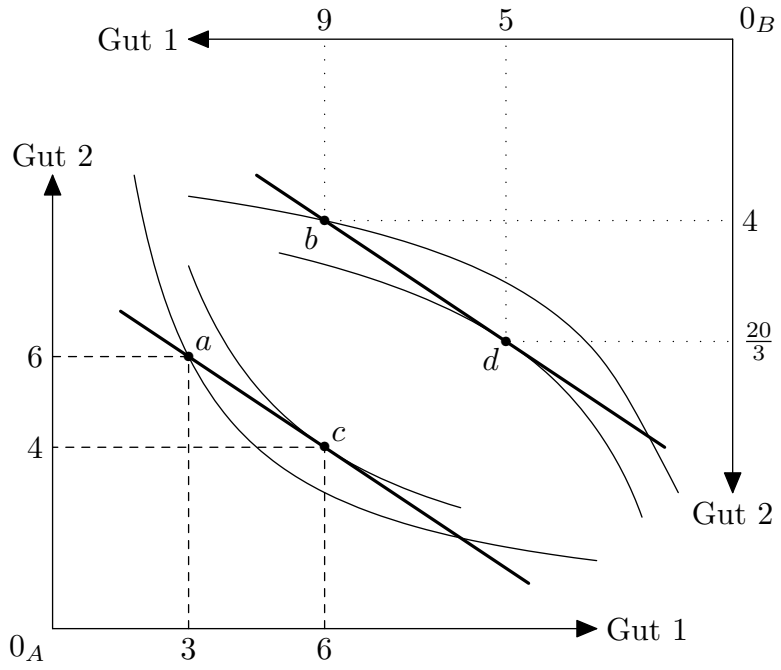
die sogenannte Normal-Form einer Geraden (oder bei mehr als zwei Gütern die Normal-Form einer sogenannten Hyperebene).

Die Beziehung $p \cdot [x - a] = 0$ oder analog bei einer Person vom Typ B $p \cdot [y - b] = 0$ ist der mathematische Ausdruck dafür, dass bei jedem Marktteilnehmer durch Kaufen und Verkaufen weder ein Zuwachs noch eine Verringerung seines Eigentums — bewertet in Geld — eintritt. $p \cdot x$ ist der Wert in € eines durch Tausch für eine Person des Typs A erreichbaren Güterbündels, $p \cdot a$ ist der Wert ihrer Anfangsausstattung, ebenfalls in €. Beide Geldbeträge sind gleich, denn ihre Differenz ist Null.

3.3.3 Preisvektor und privat optimale Güterbündel

Wenn die Marktteilnehmer beispielsweise mit den Preisvektor $p = (2, 3)$ kon-

Abbildung 3.11: Konkurrenzverhalten



frontiert werden, d.h. Gut 1 kostet zwei € und Gut 2 drei €, dann können sie dasselbe Gedankenexperiment wie Gregor anstellen. In Abbildung 3.11 ist eine Edgeworth Box etwas auseinander gezogen, um die Kalkulationen einer Person vom Typ A von der eines Typs B getrennt betrachten zu können. Die Person vom Typ A möchte beim Preisvektor $p = (2, 3)$ das Güterbündel c einhandeln, wozu sie zwei Einheiten ihres Besitzes von Gut 2 anbietet und

dafür drei Einheiten des Gutes 1 nachfragt, ganz im Einklang mit der fest vorgegebenen Tauschrichtung $(3, -2)$. Die Person vom Typ B strebt hingegen das Güterbündel d an. Sie möchte 4 Einheiten von Gut 1 anbieten, um dafür — wieder im Einklang mit der fest gegebenen Tauschrichtung — $\frac{8}{3}$ des Gutes 2 netto nachzufragen.

Die Kalkulation des optimalen Güterbündels für eine Person vom Typ A verlangt, dass diese Budgetgerade eine ihrer Indifferenzkurven tangiert, was beim Güterbündel $c = (6, 4)$ der Fall ist. Die Erstausstattung wird so umgeschichtet, dass im optimalen Güterbündel c die ganz private Güterbewertung — die Indifferenz-Richtung in c — mit der fest vorgegebenen gesellschaftlichen oder marktmässigen Bewertung der Güter — der Tauschrichtung $(3, -2)$ — übereinstimmt.[7] Diese tauschvermittelte Umschichtung eines Güterbündels mit dem Ziel, die private an die gesellschaftliche Güterbewertung anzupassen, hatten wir weiter oben als Mengenanpassung bezeichnet.

Die Pläne der beiden Personen sind beim Preisvektor $p = (2, 3)$ nicht miteinander vereinbar. Von Gut 1 werden von Person B vier Einheiten netto angeboten, von Person A aber netto nur drei Einheiten nachgefragt. Auf dem Markt für Gut 1 herrscht somit ein Angebotsüberhang. Von Gut 2 werden netto $\frac{8}{3} > 2$ Einheiten nachgefragt, aber nur zwei Einheiten angeboten. Auf dem Markt für Gut 2 herrscht ein Nachfrageüberschuss.

Wenn nun Gut 1 etwas billiger wird und Gut 2 im Verhältnis dazu etwas teurer, beispielsweise ein Preisvektor $p^* = (1, 45/26)$, gilt, dann wird das billigere Gut netto weniger angeboten und auch das teurere Gut netto weniger nachgefragt, folglich wird auf dem Markt für Gut 1 der Angebotsüberschuss kleiner und auf dem Markt für Gut 2 wird der Nachfrageüberschuss ebenfalls kleiner. Die beiden Märkte sind bei einem bestimmten Preisvektor im Konkurrenz-Gleichgewicht, wenn es weder Angebots- noch Nachfrageüberschüsse gibt. Man bezeichnet einen solchen Zustand auch als Markträumung und den Preisvektor, der bei Mengenanpassung zur Markträumung führt, als gleichgewichtigen Preisvektor bei Konkurrenz.

[7] Zur analytischen Berechnung des optimalen Güterbündels muss die Nutzenfunktion der Person A bekannt sein. Unterstellt ist hier eine Produktnutzenfunktion $x_1 x_2$. Nun ist entlang der Budgetgeraden der Nutzen zu maximieren, durch Wahl eines bestimmten t. Entlang der Budgetgeraden gilt $x_1 = 3 + 3t$ und $x_2 = 6 - 2t$, folglich ist der Ausdruck $(3 + 3t)(6 - 2t)$ durch Wahl eines t zu maximieren. Die erste Ableitung nach t muss im Maximum Null sein, was zur Bedingung

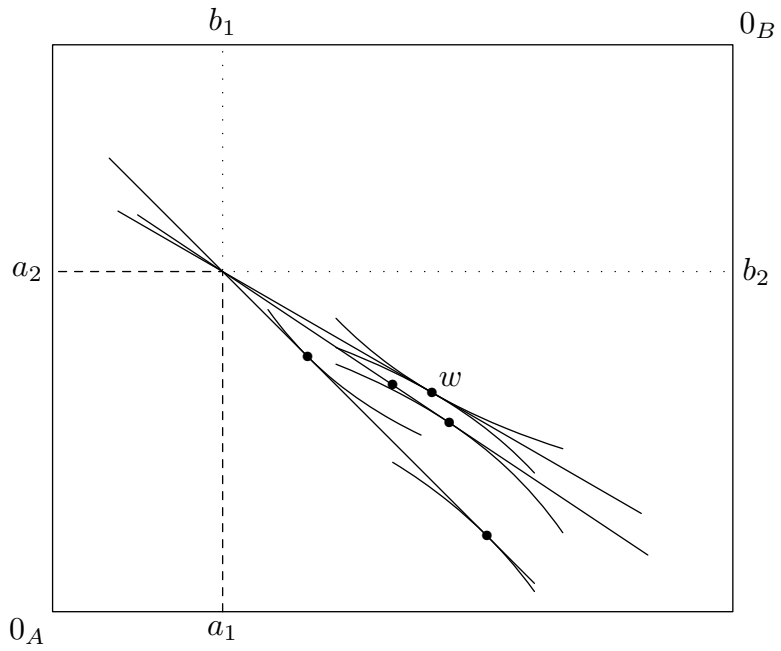
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(18 + 12t - 6t^2\right) = 12 - 12t = 0 \quad \rightsquigarrow \quad t = 1$$

führt. Also wird eine Person A im Optimum $x_1 = 3+1\cdot 3 = 6$ von Gut 1 und $x_2 = 6-1\cdot 2 = 4$ Einheiten von Gut 2 besitzen wollen.

3.3.4 Markträumung und Konkurrenz-Gleichgewicht

Wenn auf Märkten mit einem Überschussangebot der (Geld-) Preis sinkt und auf solchen mit einer Überschussnachfrage der Preis steigt, dann werden die Marktteilnehmer mit veränderten dezentralen Planungen ihrer optimalen Güterbündel auf diese Signale reagieren und die überschüssigen Mengen werden reduziert. Dies kann auch mit einer Edgeworth Box dargestellt werden. Die für beide Personen gleiche Budgetgerade wird um den Ausstattungspunkt (gegen den Uhrzeigersinn) gedreht, wodurch die beiden optimalen Güterbündel aufeinander zu wandern, bis sie schließlich bei einer bestimmten Richtung der Budgetgeraden zu einem einzigen Punkt verschmelzen. Dieser Punkt hat dieselbe charakteristische Eigenschaft wie das Walras-Gleichgewicht.

Abbildung 3.12: Konkurrenz-Gleichgewicht in der Edgeworth Box



Damit steht fest: Sowohl das Verhandeln mit immer weiterer Verkleinerung des Kerns durch Koalitionen, als auch das Verhalten der Mengenanpassung auf Preissignale führt zum selben Resultat.

Kapitel 4

Individuelle Nachfrage

Untersucht werden soll das Verhalten eines Nachfragers auf anonymen, unpersönlichen Märkten. Die Märkte, auf denen der Nachfrager seine Waren einkauft, stellen eine völlig unpersönliche Institution dar, die — wie im vorigen Abschnitt erläutert wurde — den Tausch vieler Güter zwischen vielen Personen vereinfachen. Die individuellen Merkmale des Nachfragers, wie beispielsweise Alter, Hautfarbe oder Religion sind den übrigen Marktteilnehmern und insbesondere den Anbietern völlig gleichgültig. Worauf es ausschließlich ankommt, ist seine Zahlungsbereitschaft und seine Zahlungsfähigkeit. Typische Beispiele für solche Güter bzw. Märkte sind — zumindest aus Sicht des Nachfragers — die sogenannten Güter des alltäglichen Bedarfs, wie Zeitschriften und Getränke, auch wenn die Anzahl und Größe der Anbieter nicht ganz dem Ideal eines Wettbewerbsmarktes entsprechen mag.

Es gibt außer ihm noch viele weitere Nachfrager und Anbieter, auf die alle ein verschwindend kleiner Marktanteil entfällt. Das Verhalten des Nachfragers ist das eines Mengenanpassers. Das bedeutet, dass er zu den vorhandenen Marktpreisen beliebige Mengen der Güter kaufen kann, ohne dadurch die Marktpreise selbst spürbar zu beeinflussen. Wenn sich die Preise ändern, dann wird er darauf mit einem revidierten Verbrauchsplan reagieren.

Da nur die Nachfrage untersucht werden soll, muss der Konsument statt mit einem Güterbündel mit einer Geldsumme ausgestattet sein, einer Geldsumme, die er zum Kauf der Güter einsetzt. In einem späteren Abschnitt wird geklärt, wie der Konsument sich diesen Geldbetrag — sein Einkommen — durch Teilnahme an der Produktion verschaffen kann. Sein (monatliches) Einkommen wird zum Kauf eines (monatlichen) Warenkorbs verwandt, wobei über die (Geld-) Preise der Güter nicht erst mit den Verkäufern verhandelt[1] wird. Die „normale“ Reaktion des Nachfragers auf Preiserhöhungen eines Gu-

[1] Nachdem das Rabatt-Gesetz abgeschafft wurde, kann sich das Feilschen durchaus lohnen, aber das kostet immer noch Zeit, Mühe und Überzeugungskraft.

tes, z.B. bei Zeitschriften, wird sein, dass er seinen Verbrauch dieses Gutes etwas einschränkt. Genauso ist zu erwarten, dass der Nachfrager nach einer Einkommenserhöhung (vielleicht in Folge einer Steuerreform) den Kauf der meisten seiner Güter vergrößern wird.

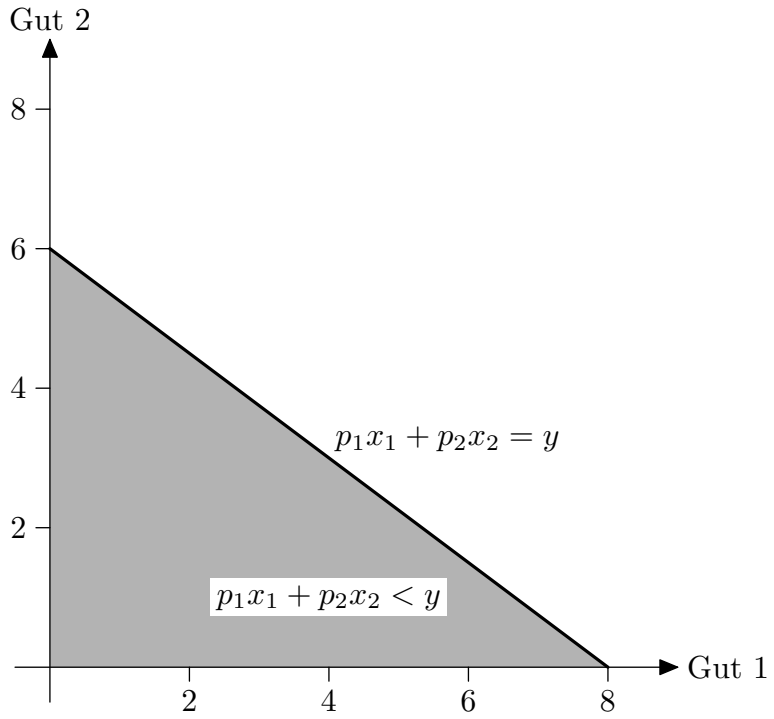
4.1 Budgetbeschränkung

Angenommen, der Nachfrager besitzt einen Geldbetrag y. Welche Konsumgüterbündel (x_1, x_2) kann er sich bei den beiden fest vorgegebenen Preisen (p_1, p_2) leisten? Doch wohl nur solche, die zusammen nicht mehr kosten als y. Dies ist aber gleichbedeutend damit, dass seine Ausgaben für Gut 1, p_1x_1, zuzüglich seiner Ausgaben für Gut 2, p_2x_2, den verfügbaren Geldbetrag y nicht übersteigen dürfen:

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq y$$

Die linke Seite dieser Ungleichung — der Budgetbeschränkung — ist immer

Abbildung 4.1: Konsummöglichkeitsmenge



eine dimensionsbehaftete, nicht-negative, reelle Zahl und stellt die Summe

der Konsumausgaben des Nachfragers dar. Ist die Summe der Konsumausgaben kleiner als das Einkommen y, ist also $p_1x_1 + p_2x_2 < y$, dann kauft der Nachfrager ein Güterbündel, das im dunkel unterlegten Dreieck liegt. Wird das Budget ganz ausgeschöpft, gilt also $p_1x_1 + p_2x_2 = y$, dann liegt das Güterbündel auf der Hypothenuse des Dreiecks. Alle Güterbündel, deren Kauf sich der Nachfrager bei gegebenem Einkommen y und gegebenen Preisen p_1 und p_2 leisten kann, bilden seine sogenannte Konsummöglichkeitsmenge oder die Menge seiner realisierbaren Verbrauchspläne. In der Abbildung 4.1 ist sie für einen Nachfrager mit einem Einkommen von $y = 24\,€$, einem Preis $p_1 = 3\,\frac{€}{\text{Quantum von Gut 1}}$ für Gut 1 und $p_2 = 4\,\frac{€}{\text{Quantum von Gut 2}}$ für Gut 2 dargestellt.

4.2 Optimaler Warenkorb

Wir unterstellen, dass die Präferenzen des Nachfragers die fünf Präferenz-Axiome erfüllen.

Welches Güterbündel wird der Nachfrager kaufen wollen? Er plant vernünftig, wenn er sich sowohl an seinen Präferenzen als auch an seinen realisierbaren Verbrauchsplänen orientiert. Er wird jenen Warenkorb aus der Menge seiner realisierbaren Verbrauchspläne wählen, der ihm einen maximalen Nutzen verschafft.

Aufgrund der Nicht-Sättigung wird er einen Warenkorb auf der oberen Begrenzungsstrecke seiner Konsummöglichkeitsmenge wählen.

$$p_1x_1 + p_2x_2 = y$$

Wenn er sein gesamtes Einkommen nur für den Kauf des Gutes 2 aufwendet ($x_1 = 0$), dann kann er davon $x_2 = y/p_2$ Einheiten erwerben. Ähnlich kann er mit seinem Einkommen höchstens $x_1 = y/p_1$ Einheiten des Gutes 1 kaufen ($x_2 = 0$). Da seine Indifferenzkurven jedoch streng konvex sind, wird er eine Mischung

$$(x_1,\, x_2) = \lambda \left(\frac{y}{p_1},\, 0\right) + (1-\lambda)\left(0,\, \frac{y}{p_2}\right) = y\left(\frac{\lambda}{p_1},\, \frac{1-\lambda}{p_2}\right)$$

dieser beiden extremen Güterbündel anstreben, wobei der Ausgaben-Anteil für Gut 1, λ, zwischen Null und Eins liegt.

Bei zwei Gütern ist die Konsummöglichkeitsmenge des Nachfragers ein Dreieck mit den Eckpunkten $(0,\, 0)$, $(y/p_1,\, 0)$ und $(0, y/p_2)$. Wegen der Nicht-Sättigung kommen nur Punkte auf der Verbindungsstrecke zwischen $(y/p_1,\, 0)$ und $(0, y/p_2)$ in Betracht, also eine Konvex-Kombination wie in der obigen

Gleichung angegeben. Zur Wahl steht nun noch der Ausgabenanteil λ für Gut 1 und damit auch $1-\lambda$, der Rest, welcher zum Kauf von Gut 2 verwandt wird. Je größer λ, desto höher ist der Anteil von Gut 1 am Warenkorb; zugleich ist dann aber $1-\lambda$ und damit der Anteil von Gut 2 um so kleiner. Im Extremfall $\lambda = 1$ wird ausschließlich das Gut 1 gekauft, also das Güterbündel

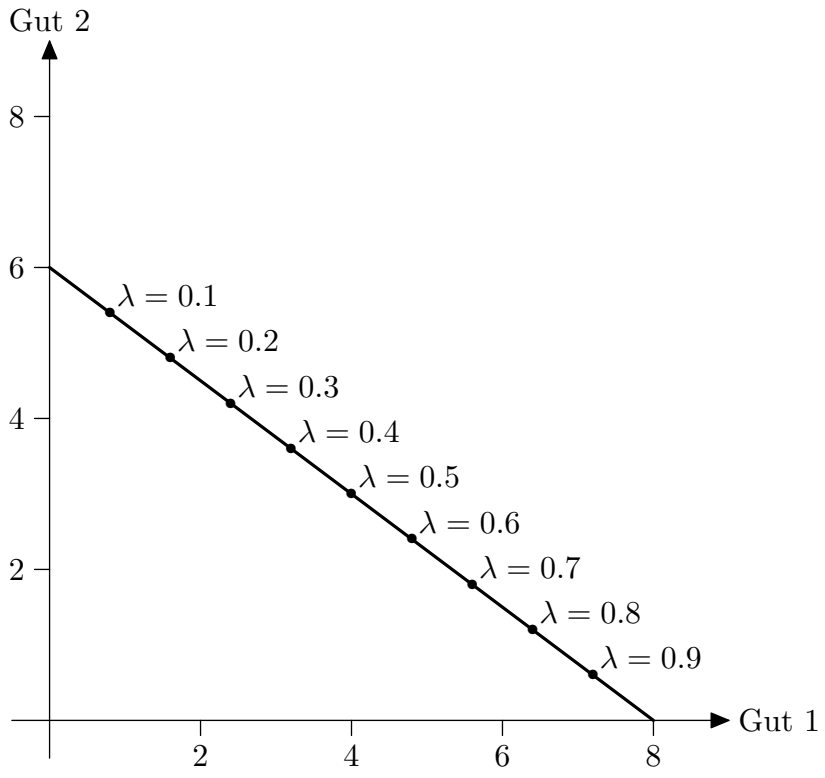
$$(x_1,\, x_2) = 1\left(\frac{y}{p_1},\, 0\right) + (1-1)\left(0,\, \frac{y}{p_2}\right) = \left(\frac{y}{p_1},\, 0\right)$$

und im Extremfall $\lambda = 0$ wird ausschließlich Gut 2 gekauft

$$(x_1,\, x_2) = 0\left(\frac{y}{p_1},\, 0\right) + (1-0)\left(0,\, \frac{y}{p_2}\right) = \left(0,\, \frac{y}{p_2}\right)\ .$$

Der Konsument steht vor einer Entscheidung, die im wesentlichen dieselbe

Abbildung 4.2: Budgetanteile der Ausgaben für Gut 1



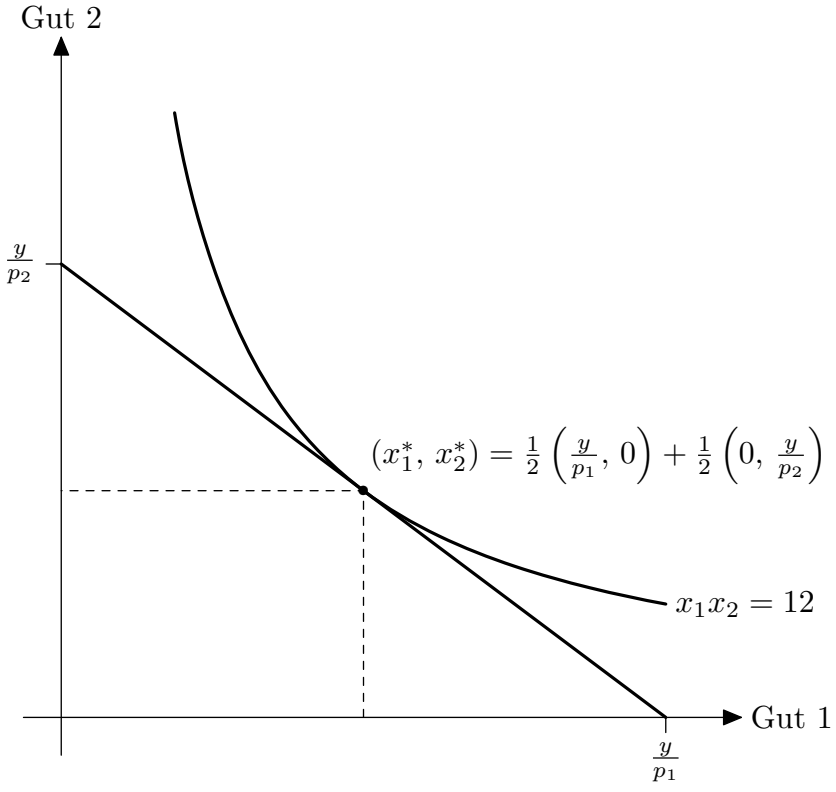
ist wie die einer Person vom Typ A oder B des vorigen Abschnitts. Der einzige äußerliche Unterschied besteht darin, dass dort ein Güterbündel $(a_1,\, a_2)$

oder b als Anfangsausstattung vorgegeben war und hier ist das Einkommen y vorgegeben. Wenn jedoch $p_1a_1 + p_2a_2 = y$ als (Geld-) Wert der Erstausstattung gesetzt wird, dann steht unser Konsument hier vor derselben Entscheidung wie eine Person A, nachdem diese ihre Erstausstattung verkauft hat und danach einen optimalen Warenkorb wählt. Statt die Entscheidung eines Warenbesitzers wird hier also die Entscheidung eines Geldbesitzers untersucht. Beide treffen in gleicher Weise ihre Entscheidung bei gegebenen Preisen, welche sich unbeeinflusst von ihrer individuellen Entscheidung auf Wettbewerbsmärkten bilden.

4.2.1 Geometrische Darstellung

Wie bereits beim Verhalten der Mengenanpassung im vorigen Abschnitt beschrieben, wird der Nachfrager jenen Warenkorb (x_1^*, x_2^*) wählen, bei dem

Abbildung 4.3: Optimaler Warenkorb bei einer Produkt-Nutzenfunktion



seine Budgetgerade eine Indifferenzkurve berührt. Von diesem Berührpunkt aus gesehen, verläuft die Budgetgerade immer durch die Schlechter-Menge,

daher ist es der Warenkorb, der dem Konsumenten den höchsten Nutzen unter allen erreichbaren seiner Konsummöglichkeitsmenge verschafft.

Der Preisvektor (p_1, p_2) steht senkrecht auf der Budgetgeraden. Dies ist im Berührpunkt (x_1^*, x_2^*) gleich seiner Präferenzrichtung. Damit gilt nach wie vor: für den Konsumenten ist jenes Güterbündel das beste unter den (durch sein Einkommen und die Marktpreise) gegebenen Bedingungen, bei welchem seine private Güterbewertung — seine Präferenzrichtung — mit der gesellschaftlichen, marktmäßigen Güterbewertung — der Richtung des Preisvektors — übereinstimmt.

4.2.2 Analytische Berechnung

Es gibt viele Arten der analytischen Berechnung des optimalen Warenkorbes. In den meisten Lehrbüchern wird die gestellte Optimierungsaufgabe mit einer sogenannten Lagrange-Funktion in eine reine Maximierungsaufgabe umgeschrieben und dann gelöst. Da dieses Verfahren jedoch erst im Sommersemester in der Vorlesung Mathe 2 behandelt wird, kommt hier ein anderer Ansatz zum Tragen. Wir berechnen den Ausgabenanteil λ für das Gut 1, der eine gegebene Nutzenfunktion maximiert. Diese Herangehensweise hat zudem den Vorteil, unmittelbar an der ersten charakteristischen Eigenschaft streng konvexer Indifferenzkurven anzusetzen.

4.2.2.1 Produkt-Nutzenfunktion

Angenommen, die Präferenzen des Nachfragers können durch eine Produkt-Nutzenfunktion $x_1 x_2$ beschrieben werden. Da

$$x_1 = \lambda \frac{y}{p_1} \qquad \text{und} \qquad x_2 = (1-\lambda)\frac{y}{p_2}$$

ist also λ so zu wählen, dass das Produkt

$$x_1 x_2 = \left[\lambda \frac{y}{p_1}\right]\left[(1-\lambda)\frac{y}{p_2}\right] = \frac{y^2}{p_1 p_2}\left(\lambda - \lambda^2\right)$$

maximal wird. Die Bedingung erster Ordnung für ein Maximum verlangt, dass die erste Ableitung nach λ Null wird:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left[\frac{y^2}{p_1 p_2}\left(\lambda - \lambda^2\right)\right] = \frac{y^2}{p_1 p_2}(1-2\lambda) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Bei einer Produkt Nutzenfunktion wird der Nachfrager also sein Einkommen gerade hälftig auf den Kauf der beiden Güter aufteilen:

$$x_1^* = \frac{1}{2}\frac{y}{p_1} \qquad p_1 x_1^* = \frac{y}{2}$$
$$x_2^* = \frac{1}{2}\frac{y}{p_2} \qquad p_2 x_2^* = \frac{y}{2}$$

Für die im vorigen Abschnitt gegebenen Größen des Einkommens $y = 24$ und der beiden Preise $p_1 = 3$ und $p_2 = 4$ ergibt sich somit als optimales Güterbündel

$$(x_1^*,\, x_2^*) = \left(\frac{1}{2}\frac{24}{3},\, \frac{1}{2}\frac{24}{4}\right) = (4,\, 3)$$

Bei einem höheren Preis für das Gut 1, beispielsweise $p_1 = 5$, beträgt sein Ausgabenanteil am Budget nach wie vor 1/2, allerdings kann sich der Nachfrager mit 12 € dann nur noch 12/5 Einheiten davon kaufen. Die nachgefragte Menge des Gutes 2 bleibt jedoch unverändert. Bei einem höheren Einkommen wird ebenfalls der Ausgabenanteil bei beiden Gütern hälftig bleiben. Von beiden Gütern wird aber ein größeres Quantum gekauft. Ist das Einkommen beispielsweise $y = 30$ € statt 24, dann wird der Konsument $15/3 = 5$ Einheiten von Gut 1 und 15/4 Einheiten von Gut 2 kaufen. Damit steht das Reaktionsmuster des Konsumenten mit einer unterstellten Produkt-Nutzenfunktion im wesentlichen im Einklang mit unserer Alltagserfahrung über das „normale“ Verbraucherverhalten.

4.2.2.2 CES-Nutzenfunktion

Die Berechnung des optimalen Budgetanteils λ für Gut 1 wird bei einer CES-Nutzenfunktion

$$\left[\alpha x_1^{-\beta} + x_2^{-\beta}\right]^{\frac{-1}{\beta}}$$

etwas aufwendiger. Nach Einsetzen von

$$x_1 = \lambda\frac{y}{p_1} \qquad \text{und} \qquad x_2 = (1-\lambda)\frac{y}{p_2}$$

ist λ so zu wählen, dass der Ausdruck

$$\left[\alpha\left(\lambda\frac{y}{p_1}\right)^{-\beta} + \left((1-\lambda)\frac{y}{p_2}\right)^{-\beta}\right]^{\frac{-1}{\beta}}$$

maximal wird. Die erste Ableitung nach λ wird mittels der Kettenregel gebildet. Sie ist gleich Null, falls der Faktor

$$-\beta\alpha\left(\frac{y}{p_2}\right)^{-\beta}\lambda^{-\beta-1}+\beta\left(\frac{y}{p_2}\right)^{-\beta}(1-\lambda)^{-\beta-1}$$

gleich Null wird. Auflösen nach dem nutzenmaximalen λ ergibt schließlich

$$\lambda=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}}}\ .$$

Die optimale Mengen von Gut 1 und Gut 2 belaufen sich somit auf

$$x_1^*=\lambda\frac{y}{p_1}=\frac{y}{p_1+\left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}p_2^{\frac{\beta}{1+\beta}}}$$

und

$$x_2^*=(1-\lambda)\frac{y}{p_2}=\frac{y}{p_2}-\frac{y}{p_2+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}}p_2}$$

Anders als bei der einfachen Produkt-Nutzenfunktion — wo λ eine Konstante ist — werden bei einer CES-Nutzenfunktion beide Komponenten des optimalen Warenkorbes von den Preisen aller Güter beeinflusst.

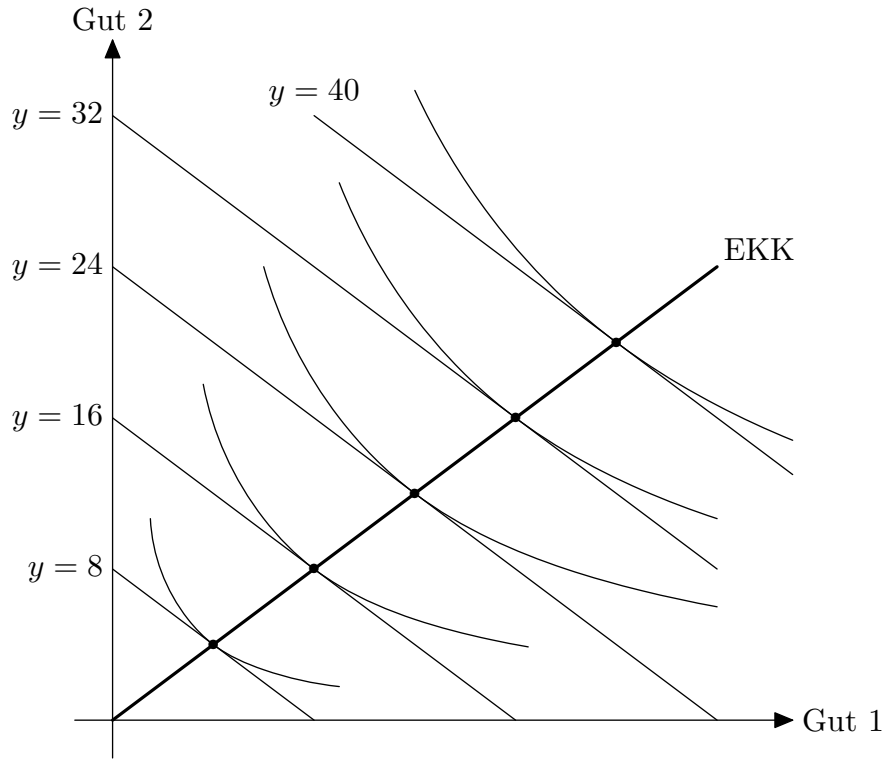
Bei beiden Nutzenfunktionen sind die nachgefragten Gütermengen jedoch direkt proportional zum Einkommen y des Nachfragers.

4.3 Einkommens-Konsum-Kurven

Die Güterpreise werden nun konstant gehalten, nur das Einkommen des Konsumenten wird gedanklich verändert. Je höher das Einkommen des Konsumenten ist, desto weiter außen verläuft seine Budgetgerade im Güterraum. Zu jedem Einkommensniveau gibt es (bei fest vorgegebenen Preisen) genau einen optimalen Warenkorb. Die Verbindungslinie all dieser optimalen Warenkörbe bei variablem Einkommen und konstanten Preisen wird als Einkommens-Konsum-Kurve (EKK) und manchmal auch als Einkommens-Expansions-Pfad bezeichnet.

Da im optimalen Warenkorb die Präferenzrichtung des Konsumenten mit der Richtung des Preisvektors übereinstimmt und die Preise bei der Konstruktion der EKK konstant gehalten werden, ist die EKK eine sogenannte

Abbildung 4.4: Einkommens-Konsum-Kurve einer Produkt-Nutzenfunktion



Isokline[2] der Nutzenfunktion. Eine Isokline der Nutzenfunktion ist ein Pfad im Güterraum mit konstanter Präferenzrichtung bei alternativen Nutzenniveaus. Zu jedem Preisvektor gibt es also eine besondere EKK oder Isokline der Nutzenfunktion.

4.3.1 Homothetische Präferenzen

Die analytische Berechnung optimaler Warenkörbe hatte bereits ergeben, dass bei einer CES-Nutzenfunktion die Ausgabenanteile der Güter durch die Preise, nicht jedoch das Einkommen beeinflusst werden. Daher sind die EKK bei einer CES-Nutzenfunktion Geraden aus dem Nullpunkt des Güterraumes. Das Gleiche gilt natürlich für EKK bei den Typen von Nutzenfunktionen, die als spezielle Parameterkonstellationen α und β aus der CES-Nutzenfunktion hervorgehen, also der Produkt-, Summe-, Minimum- und Cobb-Douglas-Nutzenfunktion. Die CES-Nutzenfunktion und ihre Ab-

[2]Isoklinen werden im kommenden Sommersemester in Mathe 2 genauer erläutert.

kömmlinge sind ein Beispiel für eine Klasse von Präferenzordnungen, deren charakteristische Eigenschaft die Linearität der zugehörigen EKK ist. Man bezeichnet diese Klasse als homothetische[3] Präferenzordnungen.

Homothetische Präferenzen unterstellen also, dass die Indifferenzkurven eines Konsumenten durch eine radiale Verschiebung (das ist bei einer Verlagerung einer gekrümmten Kurve dasselbe wie eine parallele Verlagerung einer Geraden) auseinander hervorgehen. Die Indifferenzkurven dürfen sich nicht gegeneinander drehen oder rotieren. Homothetische Präferenzen sind auch dadurch gekennzeichnet, dass alle Isoklinen Geraden sind, die durch den Ursprung des Güterraumes verlaufen. Die Richtung dieser Isoklinen ist nicht zu verwechseln mit der Präferenzrichtung.

4.3.2 Superiore und inferiore Güter

Im Falle homothetischer Präferenzen sind die optimalen Gütermengen direkt proportional zum Einkommen des Nachfragers. Falls sich die optimalen Gütermengen jedoch nicht proportional zum Einkommen verhalten, spricht man von superioren oder inferioren Gütern. Die Einkommens-Konsum-Kurve ist dann nicht mehr linear. Auch wenn von superioren und inferioren Gütern die Rede ist, so ist dies niemals eine Eigenschaft der Güter selbst, sondern es ist stets die individuelle Bewertung eines Konsumenten, der sie bei konstanten Preisen entweder über- oder unterproportional zu seinem Einkommen nachfragt.

In den Lehrbüchern von Schumann et al. (1999) und Varian (1999, S. 95) wird die Fallunterscheidung unterschiedlich bezeichnet.

Überproportional: Im Lehrbuch von Schumann et al. (1999, S. 59) wird das Gut, das mit steigendem Einkommen überproportional nachgefragt wird als *superior* bezeichnet. Derselbe Sachverhalt wird im Lehrbuch von Varian (1999, S. 91 und S. 95) *normales* Gut und später *Luxusgut* genannt.

Unterproportional: Es ist weiter zu unterscheiden, ob die nachgefragte Menge nur relativ oder sogar absolut zurückgeht.

- Nachfragemenge steigt: Falls mit steigendem Einkommen ein Gut vermehrt nachgefragt wird, und sich zugleich sein Anteil am optimalen Warenkorb vermindert, dann heißt es laut Schumann et al. (1999, S. 59) *relativ inferior* und bei Varian (1999, S. 95) *notwendiges Gut*.

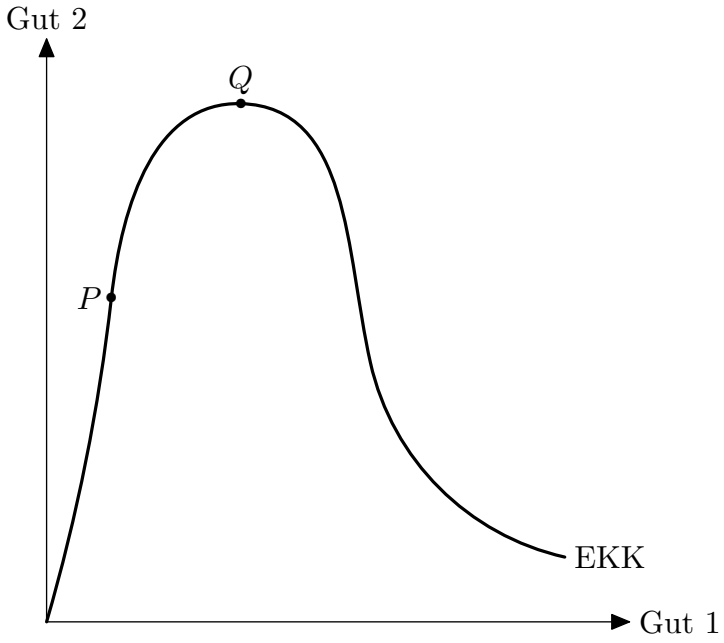
[3] Die mathematische Definition der homothetischen (und homogenen) Funktionen ist Gegenstand der Vorlesung Mathe 2 für WiWis im kommenden Sommersemester.

- Nachfragemenge sinkt: Falls mit steigendem Einkommen ein Gut verringert nachgefragt wird, dann sinkt auch sein Anteil am optimalen Warenkorb. Dieser Sachverhalt wird bei Schumann et al. (1999, S. 58) als *absolut inferiores* Gut bezeichnet und bei Varian (1999, S. 92)[4] einfach als *inferiores* Gut.

Die Nomenklatur bei Schumann et al. (1999) ist systematisch, es werden jeweils passende Begriffspaare benutzt, deshalb werden wir sie auch hier anwenden.

Ein Gut kann nur ab einem positiven Quantum absolut inferior werden, denn Güterbündel haben keine negativen Komponenten. Die Einkommens-

Abbildung 4.5: Relativ und absolut inferiorer Bereich bei Gut 2



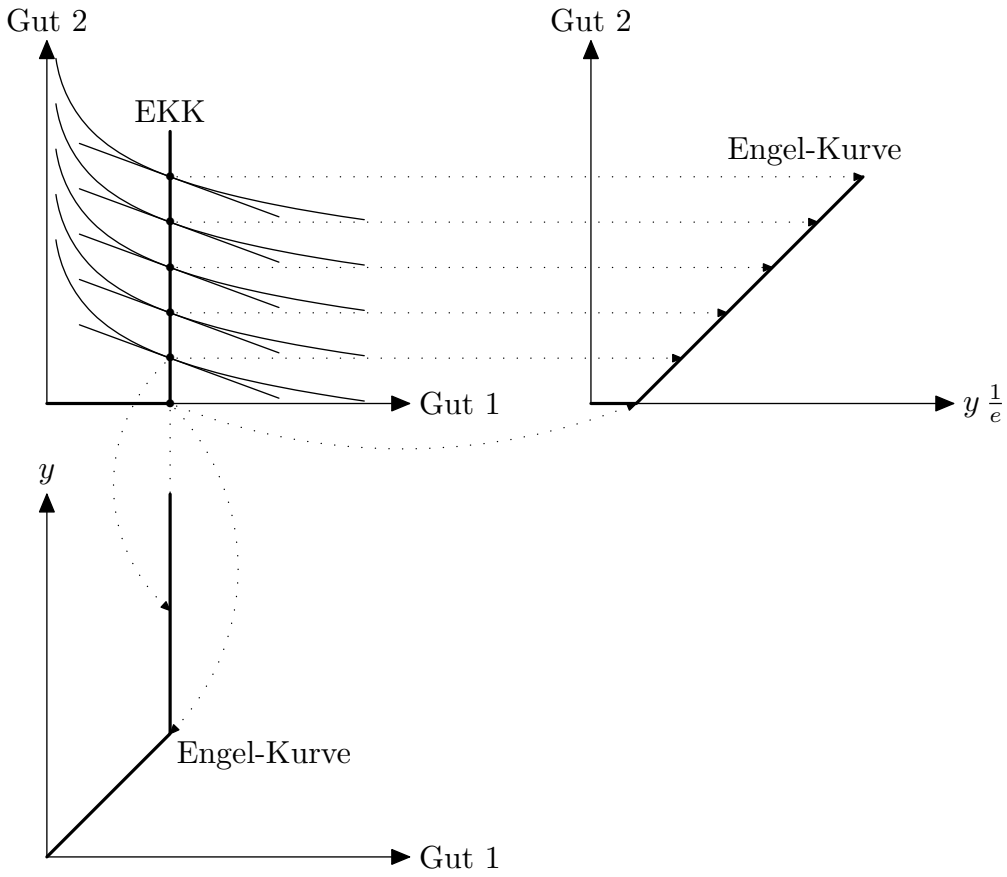
Konsum-Kurven verlaufen in der Nähe des Ursprungs immer in nord-östlicher Richtung, d.h. bei sehr geringen Einkommensniveaus kann es nicht zur absoluten Inferiorität eines Gutes kommen. In Abbildung 4.5 ist das Gut 2 zwischen den Punkten P und Q auf der EKK relativ inferior und ab Q ist es absolut inferior. Das Gut 1 ist überall superior.

[4] Als Beispiele werden Haferschleim und Extrawurst genannt. Für die deutschen Leser des Lehrbuches sei gesagt, dass der Übersetzer ein Österreicher ist. Das Wort Extrawurst ist in Deutschland eine Metapher für ein besonderes Essen, während es in Österreich ein Name für eine preiswerte Wurst aus Resten (mit einem Hauch Knoblauch) ist.

4.3.3 Engel-Kurven

Von einer EKK ausgehend lassen sich so viele Engel-Kurven[5] konstruieren, wie es Gütersorten gibt. Eine Engel-Kurve stellt die Beziehung zwischen dem optimalen Quantum eines Gutes und dem Einkommen eines Konsumenten bei konstanten Güterpreisen dar. Jeder Punkt (x_1, x_2) der Einkommens-

Abbildung 4.6: Engel-Kurven bei quasi-linearer Nutzenfunktion



[5]Die Messung der Beziehung zwischen Einkommenshöhe und dem Anteil bestimmter Güter an den Konsumausgaben war einer der allerersten empirischen Untersuchungsgegenstände der Mikroökonomik. Mitte des 18. Jahrhunderts ermittelte der sächsische Statistiker Ernst Engel (1821–1896), dass die Nahrungsmittelausgaben mit steigendem Einkommen zwar absolut zunehmen, ihr Anteil an den Konsumausgaben jedoch sinken. Dieses sogenannte Engelsche Gesetz, wonach Nahrungsmittel bei den meisten Konsumenten relativ inferiore Güter sind, liefert den Namen für die sogenannten Engel-Kurven. Der Berliner Statistiker Heinrich Schwabe fand im Jahre 1868 einen ähnlichen Zusammenhang zwischen den Mietausgaben und dem Einkommen.

Konsum-Kurve ist ein optimales Güterbündel, bei konstanten Preisen und variablem Einkommen. Die Engel-Kurve für Gut 2 stellt den Zusammenhang zwischen Einkommenshöhe y und optimaler Menge des Gutes 2 dar. Sie ist in Abbildung 4.6 im rechten Teildiagramm dargestellt, wobei aus Platzgründen der Maßstab der horizontalen Einkommens-Achse auf y/e geändert ist. Die zweite Engel-Kurve für Gut 1 ist links unten dargestellt, wobei die Einkommens-Achse vertikal verläuft und die Gütermengen von Gut 1 nach unten projiziert sind.

In der Abbildung 4.6 sind die beiden Engel-Kurven dargestellt, die es bei einer quasi-linearen Nutzenfunktion[6] im Falle zweier Gütersorten gibt. Die EKK hat die Form eines spiegelbildlichen L. Das Gut 2 wird bis zu einem gewissen Schwellenwert des Einkommens gar nicht nachgefragt und das Gut 1 ist ab diesem Schwellenwert mit einer konstanten Menge im optimalen Warenkorb vertreten, was zu einem waagerechten ersten Zweig und einem senkrechten zweiten Zweig der EKK führt. Beide Engel-Kurven sind ebenfalls nicht linear, sie bestehen jedoch aus zwei geraden Kurvenstücken. Gut 1 ist dabei zunächst — bei sehr niedrigem Einkommen — superior und nach dem Schwellenwert des Einkommens auf der Grenze zwischen relativ und absolut inferior, da sein Quantum im optimalen Warenkorb konstant bleibt. Das Gut 2 hingegen wird bei sehr geringem Einkommen gar nicht nachgefragt und wird ab dem Schwellenwert des Einkommens zu einem superioren Gut.

4.4 Preis-Konsum-Pfade

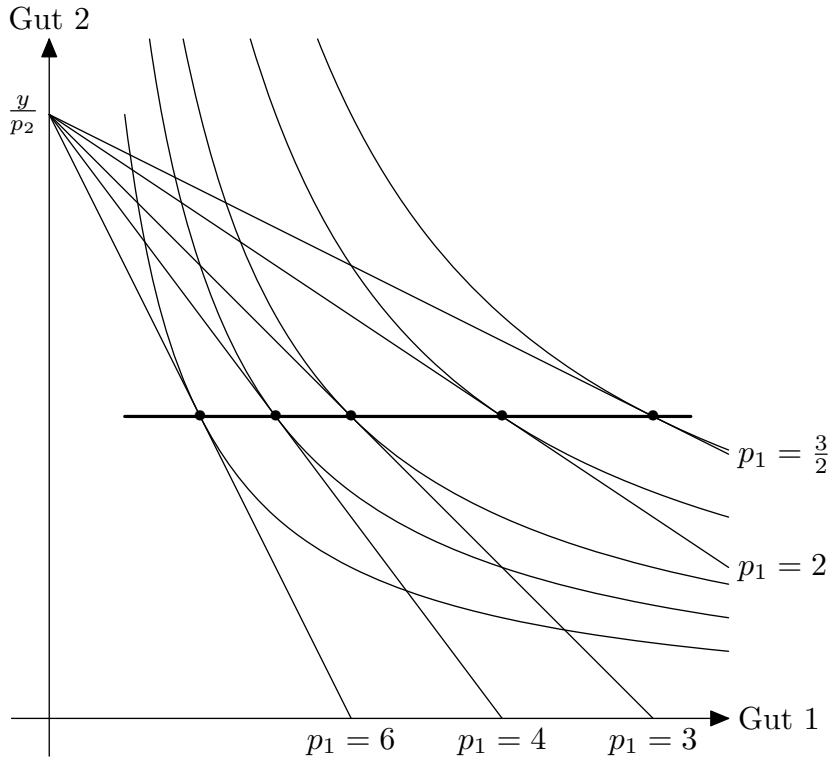
Nun soll das Einkommen des Konsumenten konstant sein und es wird nach seinen optimalen Warenkörben gefragt, wenn einer der beiden Güterpreise verändert und der andere konstant bleibt. Im vorigen Abschnitt hatten wir gesehen, dass sich die Budgetgeraden der Personen A oder B um ihren Ausstattungspunkt drehen, wenn sich einer der beiden Güterpreise verändert. Hier, bei vorgegebenem Einkommen und Konstanz eines der beiden Güterpreise, dreht sich die Budgetgerade um einen anderen Punkt, dessen Preis konstant bleibt. Angenommen, der Preis von Gut 1 wird halbiert, dann kann sich der Konsument nach wie vor dieselbe Maximalmenge y/p_2 von Gut 2 kaufen, während er sich im Extremfall die doppelte Menge von Gut 1 kaufen kann, wenn er völlig auf Gut 2 verzichtet. Wenn also nur p_1 verändert wird, dann dreht sich die Budgetgerade des Konsumenten um den Punkt

[6] Die mathematische Behandlung der optimalen Güterbündel bei einer quasi-linearen Nutzenfunktion muss vorläufig zurückgestellt werden, da dazu das sogenannte Kuhn-Tucker Verfahren der Optimierung benötigt wird, das erst im kommenden Sommersemester in Mathe 2 zur Sprache kommt.

$(0,\ y/p_2)$ und zwar im Uhrzeigersinn, wenn p_1 vergrößert wird und gegen den Uhrzeigersinn, wenn p_1 verringert wird.

Bei alternativen Preisen p_1 (und konstantem Einkommen y, sowie konstantem Preis des anderen Gutes p_2) dreht sich die Budgetgerade des Konsumenten um den Punkt $(0,\ y/p_2)$. Es ergeben sich für jeden Preis p_1 andere

Abbildung 4.7: Preis-Konsum-Pfad bei einer Produkt-Nutzenfunktion



nutzenmaximale Güterbündel als Berührpunkte der gedrehten Budgetgeraden mit einer Indifferenzkurve. Die Verbindungslinie all dieser Berührpunkte ist ein Preis-Konsum-Pfad im Güterraum.

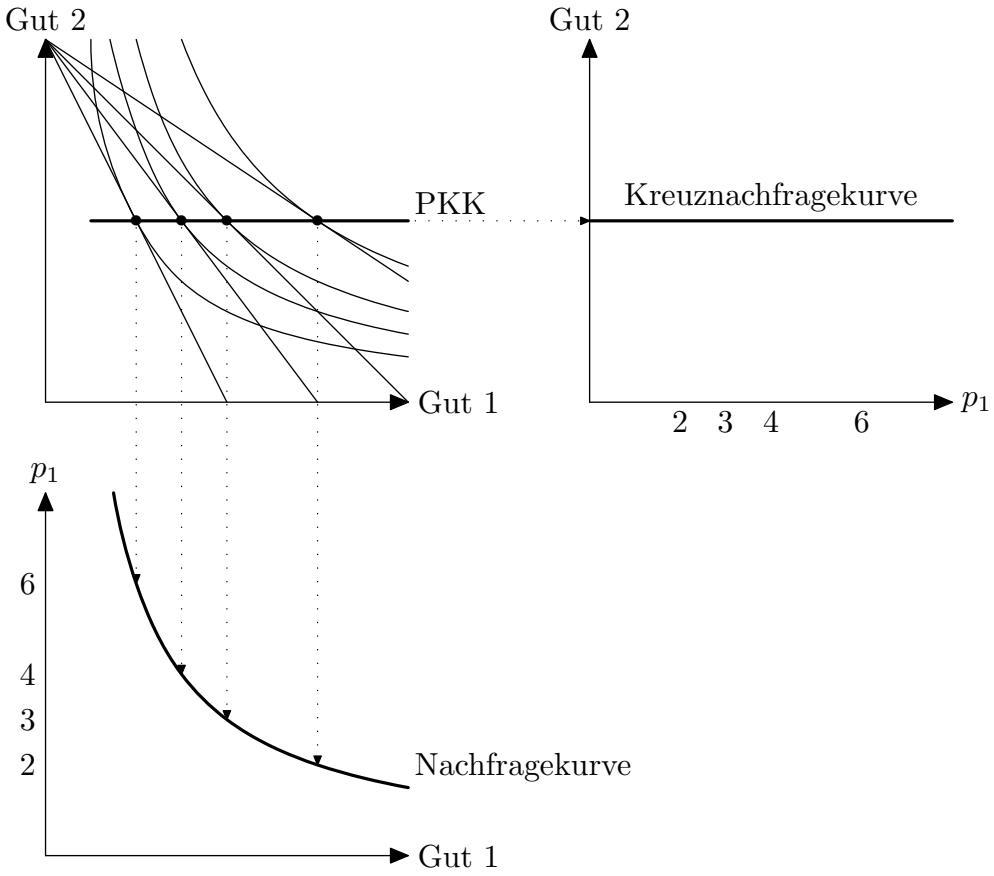
In der Abbildung 4.7 ist ein Preis-Konsum-Pfad für $y = 24$ und $p_2 = 3$ dargestellt. Bei einer Produkt Nutzenfunktion teilt der Konsument sein Einkommen — unabhängig von den Güterpreisen — immer hälftig auf den Kauf der beiden Güter auf. Diese Besonderheit schlägt sich in dem waagerechten Verlaufen des Preis-Konsum-Pfades nieder. Der dem ökonomischen Prinzip verpflichtete Konsument fragt immer dieselbe Menge $x_2^* = 4$ des Gutes 2 nach, während er um so weniger von Gut 1 nachfragt, je höher der Preis p_1 dieses Gutes ist. Bei der Nachfrage nach Gut 1 verhält sich der Konsu-

ment so, wie es uns die Alltagserfahrung vermuten lässt. Dass jedoch seine nachgefragte Menge beim Gut 2 trotz der Preisvariation bei p_1 unverändert bleibt, ist eine Besonderheit, die auf die unterstellte Produkt-Nutzenfunktion zurückzuführen ist. Allgemein bezeichnet man solche Fälle (die nicht nur bei einer Produkt-Nutzenfunktion vorkommen) als *unverbundene Güter*.

4.4.1 Nachfragekurve und Kreuznachfragekurve

Ähnlich wie sich aus einem Einkommens-Konsum-Pfad zwei Engel-Kurven konstruieren lassen, können aus einem Preis-Konsum-Pfad durch die kompo-

Abbildung 4.8: Nachfragekurven und Preis-Konsum-Pfad



nentenweise Aufspaltung der optimalen Güterbündel eine (direkte) Nachfragekurve und eine Kreuznachfragekurve gewonnen werden. In der Abbildung 4.8 ist die (direkte) Nachfragekurve für Gut 1 in Abhängigkeit vom Preis

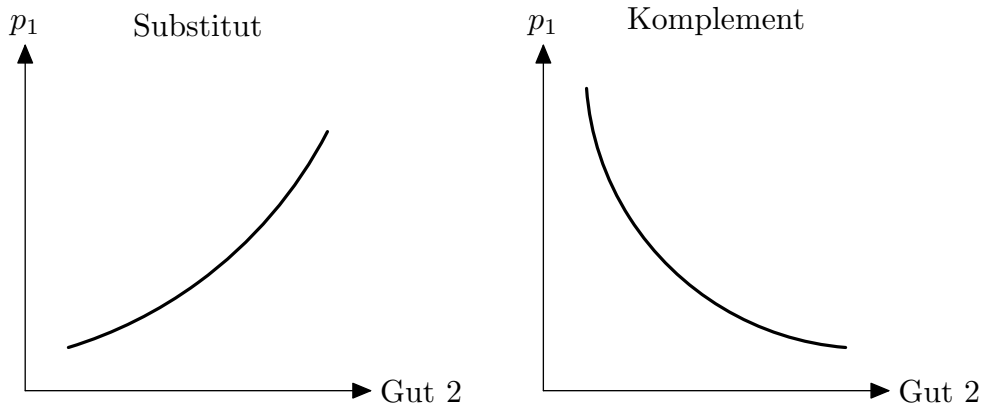
p_1 nach links unten dargestellt. Die Menge des im Optimum bei alternativen Preisen p_1 nachgefragten Gutes 1 ist nach unten projiziert, während die Preise sich aus der Lage der Budgetgeraden ergeben. Die Kreuznachfrage nach Gut 2 in Abhängigkeit des Preises p_1 ist rechts außen dargestellt. Im Falle einer Produkt-Nutzenfunktion ist dies eine waagerechte Linie, was besagt, dass sich die Menge der optimalen Menge von Gut 2 bei alternativen Preisen des anderen Gutes nicht verändert.

4.4.2 Alternative Verläufe der Kreuznachfragekurve

Falls der Konsument von Gut 2 um so mehr nachfragt, je höher der Preis des (anderen) Gutes 1 ist, wird das Gut 2 als ein *Substitut* des Gutes 1 bezeichnet. Die Summe Nutzenfunktion ist ein Beispiel für (perfekte) Substitute. Andernfalls, wenn der Konsument von Gut 2 um so weniger nachfragt, je höher der Preis des Gutes 1 ist, wird das Gut 2 als ein *Komplement* des Gutes 1 bezeichnet. Die Minimum Nutzenfunktion ist ein Beispiel für (perfekte) Komplemente. Schließlich wird das Gut 2 *unverbunden* zu Gut 1 genannt, wenn — wie im Falle der oben dargestellten Produkt-Nutzenfunktion — die nachgefragte Menge des Gutes 2 konstant bleibt, je höher der Preis des Gutes 1 ist.

Die Beziehung zwischen der im Optimum nachgefragten Menge von Gut 2 und p_1, dem Preis des Gutes 1 — die Kreuznachfragekurve des Gutes 2 — kann sowohl monoton steigen als auch monoton fallen als auch konstant

Abbildung 4.9: Kreuznachfragekurven für Gut 2



sein. Wenn die Kreuznachfragekurve für das Gut 2 monoton steigt, ist es ein Substitut zu Gut 1; wenn sie monoton fällt, ist es ein Komplement zu Gut 1 für den Konsumenten.

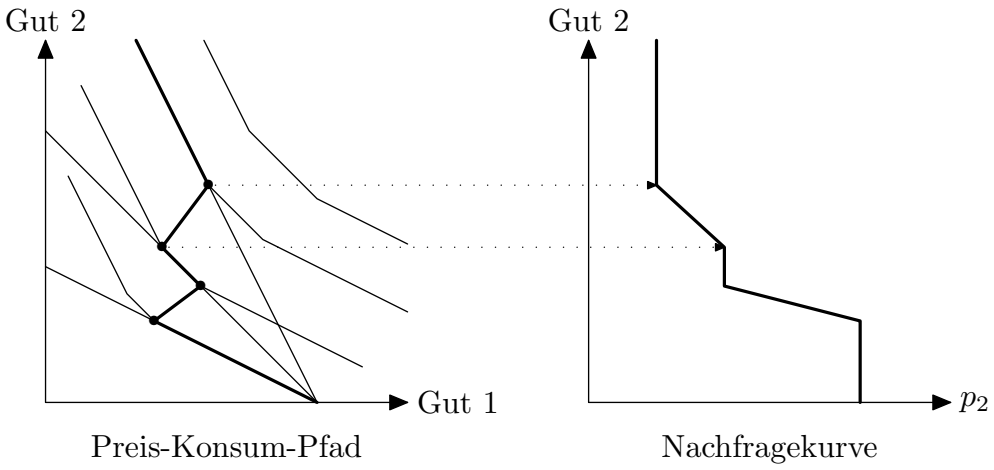
4.4.3 Nicht normale Verläufe der Nachfragekurve

Die direkte Nachfragekurve eines Konsumenten nach einem Gut ist in aller Regel eine streng monoton fallende Kurve in der Mengen-Preis-Ebene. Der Kurvenverlauf bringt zum Ausdruck, dass von einem Gut in der Regel mehr nachgefragt wird, je geringer sein Preis ist. Es gibt jedoch Ausnahmen von dieser Regel, von denen zwei kurz erwähnt werden. Wenn die Indifferenzkurven eines Konsumenten nicht streng konvex sind, dann kann seine direkte Nachfragekurve waagerechte Bereiche oder auch Sprungstellen (im Falle konkaver Indifferenzkurven) aufweisen. Aber auch bei streng konvexen Indifferenzkurven kann es vorkommen, dass die direkte Nachfragekurve ansteigt, was bedeutet, dass mit sinkendem Preis das Gut *vermindert* nachgefragt wird. Dieser Fall wird als Giffen Gut bezeichnet.

4.4.3.1 Nicht streng konvexe Indifferenzkurven

Falls die Indifferenzkurven konvex aber nicht streng konvex sind, so dass sie sich aus mehreren geraden Kurvenstücken zusammensetzen, wird die zugehörige direkte Nachfragekurve ebenfalls mehrere gerade Bereiche aufweisen. In Abbildung 4.10 ist ein solcher Fall dargestellt. Zur Abwechslung wird

Abbildung 4.10: Stückweise gerade Indifferenz- und Nachfragekurve

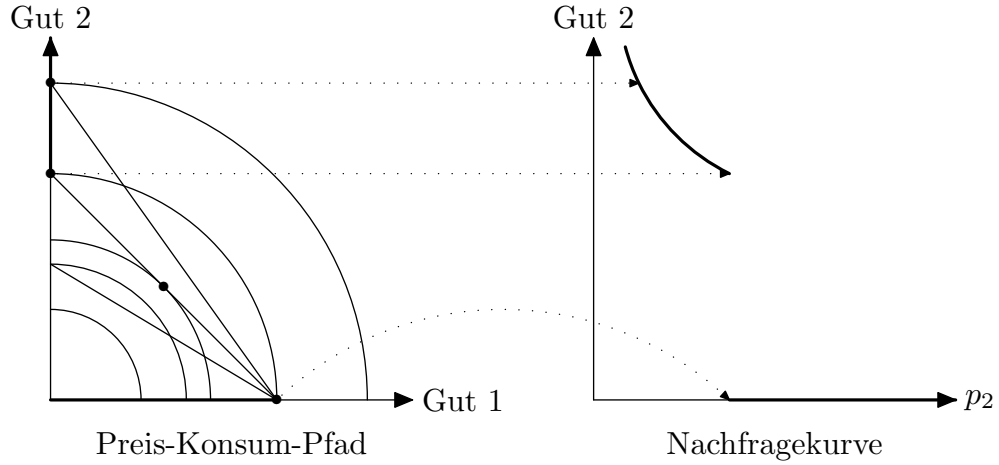


der Preis des Gutes 2 variiert, daher drehen die Budgetgeraden (im linken Teildiagramm) um den horizontalen Achsenabschnitt. Die Indifferenzkurven bestehen aus jeweils drei geraden Kurvenstücken. Die Budgetgerade kann daher (drei mal) streckenweise und nicht nur punktweise (in einer Knickstelle) eine Indifferenzkurve berühren. Beim streckenweisen Berühren gibt es kein

eindeutiges Optimum, sondern jedes Güterbündel auf diesem Zweig der Indifferenzkurve ist optimal. Insgesamt ist der Preis-Konsum-Pfad eine Zickzack-Linie. Im rechten Teildiagramm ist die zugehörige direkte Nachfragekurve für das Gut 2 dargestellt, allerdings mit vertauschten Achsen, damit die Projektion der Gütermengen nachvollziehbar wird. Die senkrechten Kurvenabschnitte zeigen an, dass bei einem bestimmten Preis die (im Optimum) nachgefragte Menge des Gutes 2 nicht eindeutig ist.

Wenn die Indifferenzkurven statt streng konvex streng konkav sind, ergibt sich ebenfalls ein nicht normaler Verlauf der direkten Nachfragekurve. Bei konkaven Indifferenzkurven werden extreme Güterbündel ihren Mischun-

Abbildung 4.11: Nachfragekurve bei konkaven Indifferenzkurven



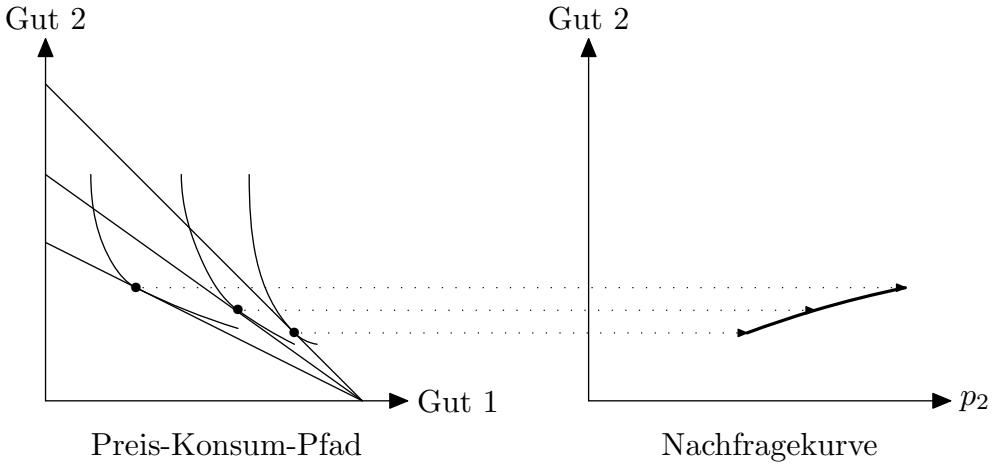
gen gegenüber bevorzugt. Der Konsument fragt entweder nur Gütersorte 1 oder nur Gütersorte 2 nach und niemals ein aus beiden Sorten gemischtes Güterbündel. Ein Berührpunkt der Budgetgeraden mit einer konkaven Indifferenzkurve ist ein Nutzenminimum statt eines Maximums. Daher verläuft der Preis-Konsum-Pfad immer entlang einer der beiden Koordinatenachsen des Güterraumes. Ab einem bestimmten Schwellenpreis wechselt der Konsument von Gut 2 zu Gut 1. Dieser Schwellenpreis markiert eine Sprungstelle auf der Nachfragekurve im rechten Teildiagramm.

4.4.3.2 Giffen Güter

Ein sogenanntes Giffen Gut liegt vor, wenn der Konsument ab einem bestimmten Preis von dem Gut *weniger* nachfragt, obwohl sein Preis *sinkt*. Giffen Güter können auch bei streng konvexen Indifferenzkurven vorkom-

men. Im nächsten Abschnitt wird deutlich werden, worauf diese anormale Reaktion der Nachfrage auf Preissenkungen zurückzuführen ist.

Abbildung 4.12: Giffen Gut



Meist wird die Nachfrage nach Kartoffeln im 19. Jahrhundert als Beispiel eines Giffen Gutes angeführt. Die meisten (Arbeiter-) Haushalte verwendeten einen großen Teil ihres Einkommens zum Kauf dieses Grundnahrungsmittels. Als dann der Preis für Kartoffeln sank, konnten sie die dadurch frei werdenden Mittel auf den Kauf anderer Lebensmittel, beispielsweise Fleisch, verwenden und zusätzlich ihrer Verbrauch an Kartoffeln einschränken.

4.4.4 Einkommens- und Substitutionseffekt

Bei unterschiedlichen Preisen eines Gutes plant der Konsument unterschiedliche Mengen davon zu kaufen. In aller Regel[7] wird er beabsichtigen, von einem Gut um so mehr kaufen, je niedriger sein Preis ist.

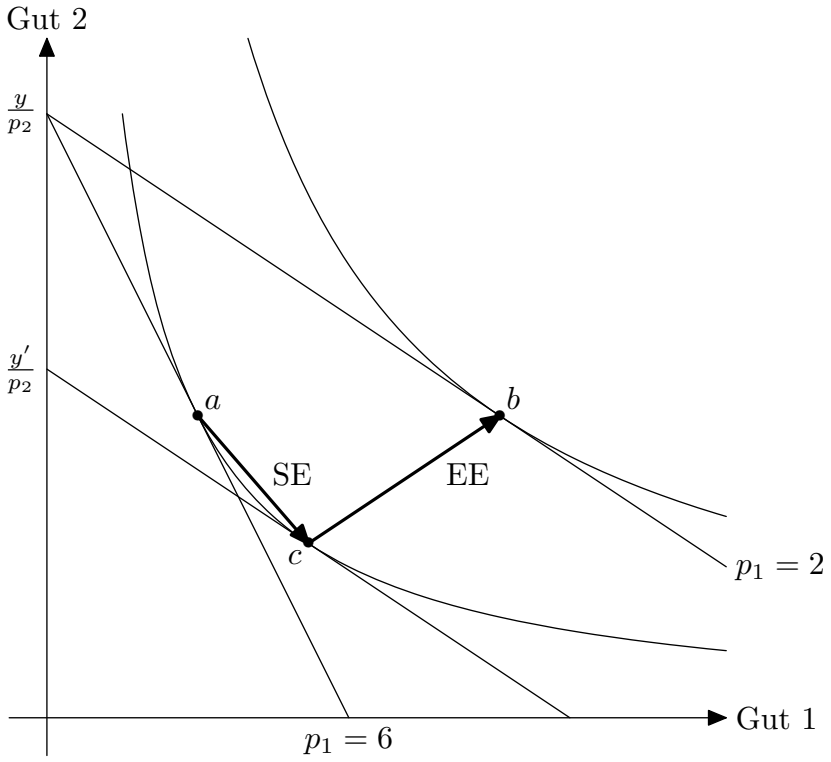
Angenommen, der Konsument hat seine Planung (a_1, a_2) für ein ganz bestimmtes Einkommen y und die beiden Güterpreise p_1 und p_2 vorgenommen. Bei einem etwas geringeren Preis des Gutes 1 $p_1' < p_1$ könnte er zwar sein altes optimales Güterbündel kaufen, er hätte aber noch den Geldbetrag $(p_1 - p_1')a_1$ übrig. Weiter wählt der Konsument die Mischung seines Warenkorbes so, dass seine private Güterbewertung — die Präferenzrichtung— mit der gesellschaftlichen — der Richtung des Preisvektors — übereinstimmt.

[7] Ausnahmen von diesem Verhalten sind zum einen in seiner Präferenzordnung zu suchen und zum anderen gibt es selbst bei streng konvexen Indifferenzkurven den oben dargestellten Fall des Giffen Gutes.

Der Konsument wird sowohl die Zusammensetzung als auch die Größe seines Güterbündels bei jedem Preis des Gutes 1 neu wählen.

Der Übergang von einem optimalen Güterbündel zu einem nach einer Preisvariation optimalen kann gedanklich in zwei Effekte zerlegt werden: einen Substitutionseffekt, der — bei Konstanz des Nutzenniveaus — eine Drehung der Budgetgeraden und damit eine neue Mischung des optimalen Warenkorbes anzeigt und einen Einkommenseffekt, der — bei Konstanz des neuen Preises — eine Parallelverschiebung der Budgetgeraden und damit eine neue Größe des optimalen Warenkorbes anzeigt.

Abbildung 4.13: Zerlegung in Substitutions- und Einkommenseffekt



In Abbildung 4.13 ist der Übergang von Güterbündel a (bei einem Preis $p_1 = 6$) zum Güterbündel b (bei einem Preis $p_1 = 2$) zerlegt in den Substitutionseffekt (SE) von a nach c und den Einkommenseffekt (EE) von c nach b. Der Konsument ist zwischen den Güterbündeln a und c indifferent. Er würde das Güterbündel c wählen, falls er statt y lediglich das Einkommen y' zur Verfügung hätte, wenn also zusätzlich zum verminderten Preis von Gut 1 auch noch ein vermindertes Einkommen hinzukäme. Der Substitutionseffekt

ist — bei streng konvexen Indifferenzkurven — immer eine Umschichtung in Richtung des preiswerteren Gutes. Da Gut 1 billiger wird, kommt es aufgrund des Substitutionseffektes zu einem höheren Anteil des Gutes 1 und einem verminderten Anteil des Gutes 2.

Der Einkommenseffekt besteht in der Vergrößerung des Güterbündels von c nach b. Er ist, wie wir in Abbildung 4.4 (S. 102) bereits dargestellt haben, im Falle einer Produkt-Nutzenfunktion für beide Güter positiv. Das Besondere an der Produkt-Nutzenfunktion besteht darin, dass sich beim Gut 2 der Substitutionseffekt und der Einkommenseffekt gegenseitig neutralisieren, sodass im Ergebnis eine konstante Menge von Gut 2 bei alternativen Preisen des Gutes 1 resultiert. Bei Gut 1 ist sowohl der Substitutions- als auch der Einkommenseffekt positiv.

4.5 Anwendungen des Nachfragemodells

Von den zahlreichen Anwendungen des Modells der individuellen Nachfrage kann in der knapp bemessenen Zeit nur eine kleine (repräsentative) Auswahl vorgestellt werden.

1. Eine Pauschalsteuer wird einer speziellen Verbrauchssteuer gegenüber vorgezogen, falls bei beiden Arten der Besteuerung das Aufkommen gleich hoch ist.

2. Aus der Wahl zwischen Konsum und Freizeit lässt sich das Arbeits(zeit) Angebot[8] ein eines Konsumenten herleiten. Dabei kommt neben der Budget- auch die Zeitbeschränkung des Konsumenten ins Spiel: Freizeit und Arbeitszeit ergänzen sich zu einer fest vorgegebenen Periodenlänge.

3. Bei der intertemporalen Konsumentscheidung ist die Einkommensausstattung über zwei Perioden vorgegeben und statt zwei Preisen ist nur ein Zinssatz vorgegeben. Diese Wahl kann als mikroökonomische Erklärung einer zinsabhängigen Sparfunktion angesehen werden, wie sie im klassischen Makromodell[9] unterstellt ist.

[8] Diese Überlegungen können als mikroökonomische Fundierung des gesamtwirtschaftlichen Arbeitsangebotes angesehen werden. Im kommenden Sommersemester bildet der makroökonomische Arbeitsmarkt einen wesentlichen Baustein des klassischen und des keynesianischen Makromodells.

[9] Das klassische Makromodell wird im kommenden Sommersemester in der Vorlesung Makroökonomik II gleich zu Beginn vorgeführt.

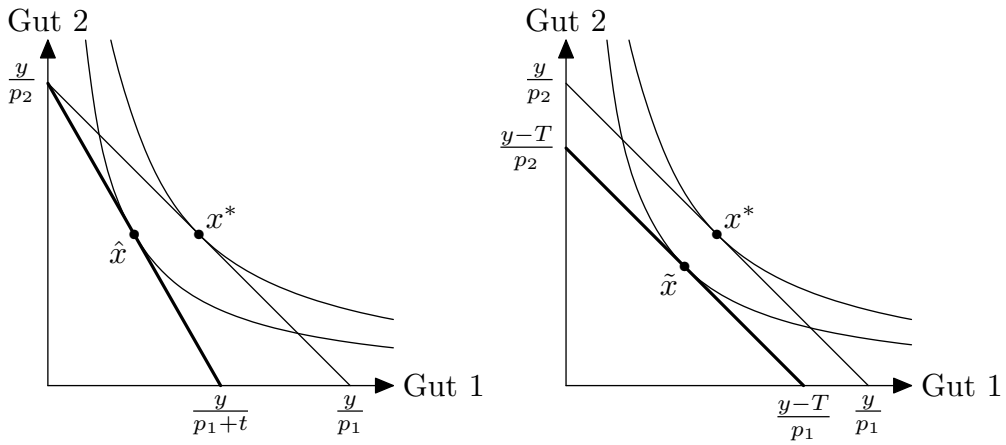
4.5.1 Die Vorteilhaftigkeit einer Pauschalsteuer

Angenommen, ein Konsument kann zwischen zwei Arten der Besteuerung wählen:

1. eine Steuer auf eines der beiden Güter, wobei pro gekaufter Einheit ein bestimmter Betrag t zu entrichten ist, oder
2. eine Pauschalsteuer in Höhe von T.

Die spezielle Verbrauchssteuer wirkt aus Sicht des Konsumenten wie ein erhöhter Preis des besteuerten Gutes, während die Pauschalsteuer (poll tax) wie ein vermindertes Einkommen zu Buche schlägt. Die Verbrauchssteuer

Abbildung 4.14: Spezielle Verbrauchssteuer und Pauschalsteuer



Verbrauschssteuer Pauschalsteuer

beim Gut 1 bewirkt eine Drehung der Budgetgeraden im Uhrzeigersinn, die Pauschalsteuer hingegen bewirkt eine Parallelverschiebung der Budgetgeraden in Richtung Ursprung des Güterraumes. Der optimale Warenkorb bei der Verbrauchssteuer ist in Abbildung 4.14 mit $\hat{x}$ bezeichnet und der optimale Warenkorb bei der Pauschalsteuer mit $\tilde{x}$.

Die beiden Besteuerungsarten haben unterschiedliche Wirkungen. Um die Vorteilhaftigkeit der Pauschalsteuer nachzuweisen, wird unterstellt, dass bei beiden Besteuerungsarten das Steueraufkommen gleich groß sein soll. Im Falle der Verbrauchssteuer lautet die Budgetgleichung des Konsumenten

$$(p_1 + t)\, x_1 + p_2 x_2 = y$$

und im Falle der Pauschalsteuer

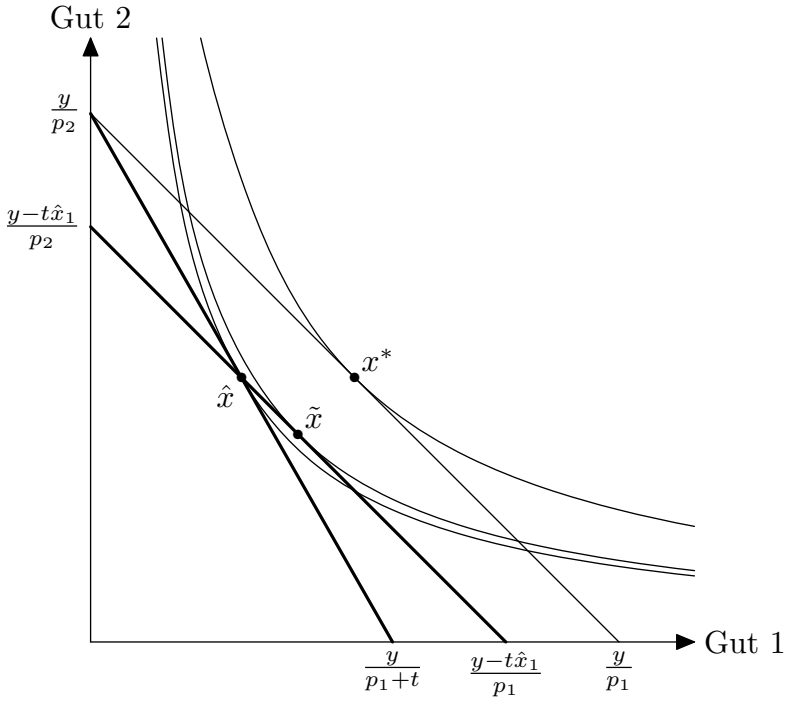
$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y - T \ .$$

Da der Konsument bei der Verbrauchssteuer den optimalen Warenkorb $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ wählt, muss er den Betrag $t\hat{x}_1$ an Steuern zahlen und dies ist dann auch der Betrag der Pauschalsteuer $T = t\hat{x}_1$. Die Budgetgleichung bei der Pauschalsteuer lautet somit unter der Voraussetzung gleichen Steueraufkommens

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = y - t\hat{x}_1 \ .$$

Sie schneidet daher die Budgetgerade bei Verbrauchsbesteuerung im Punkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, verläuft aber flacher. Die Budgetgerade bei Verbrauchsbesteuerung

Abbildung 4.15: Pauschal- und Verbrauchssteuer mit gleichem Aufkommen



berührt eine Indifferenzkurve des Konsumenten im Punkt $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$, die bei Pauschalbesteuerung hingegen nicht, auf ihr befinden sich rechts unterhalb Punkte der Bessermenge von $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$. Der optimale Warenkorb $\tilde{x}$ bei einer Pauschalsteuer liegt auf höheren Indifferenzkurve als der optimale Warenkorb

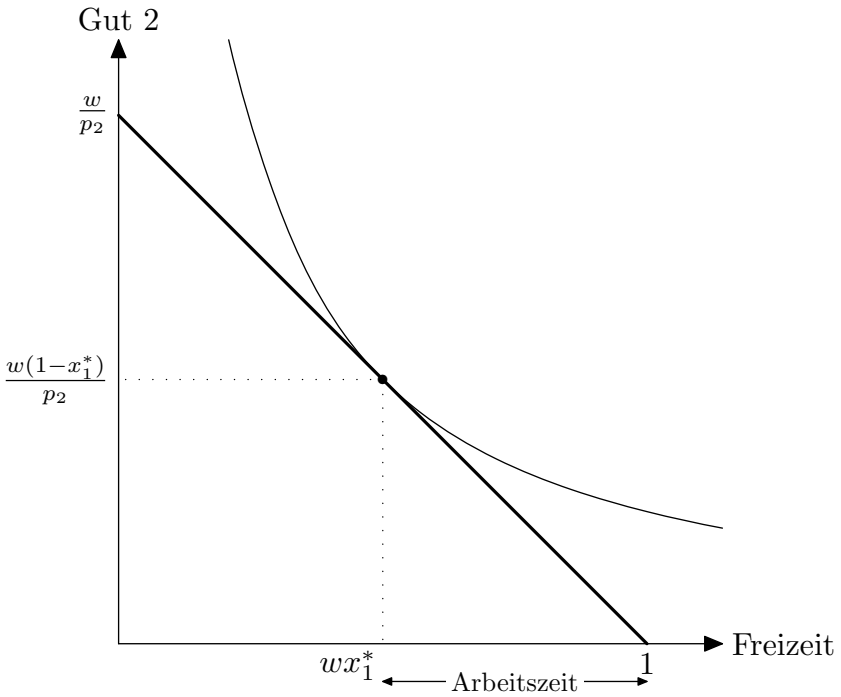
$\hat{x}$ bei einer Verbrauchssteuer. Folglich wird der Konsument eine Pauschalbesteuerung immer einer Verbrauchsbesteuerung vorziehen.

Auf die gleiche Weise lässt sich zeigen, dass ein Konsument im umgekehrten Falle von Transferzahlungen eine Pauschale gegenüber speziellen Beihilfen bevorzugt.

4.5.2 Die Wahl zwischen Konsum und Freizeit

Angenommen, Gut 2 ist ein normales Konsumgut und Gut 1 ist „Freizeit“. Seine Freizeit kann der Konsument jedoch nicht direkt auf einem anonymen Markt handeln, wohl aber seine Arbeitszeit.[10] Wenn eine bestimmte Periode

Abbildung 4.16: Einkommen und Arbeitszeit



(ein Tag, eine Woche, ein Monat, etc.) als Einheit festgelegt wird, dann hat der Konsument die Wahl zwischen Freizeit und Konsum derart, dass bei gegebenem Lohnsatz w (pro Tag, pro Woche, etc.) und gegebenem Preis p_2 nun sein Einkommen und damit seine Konsumsumme um so größer wird, je kürzer er seine Freizeit — und damit um so länger seine Arbeitszeit — wählt.

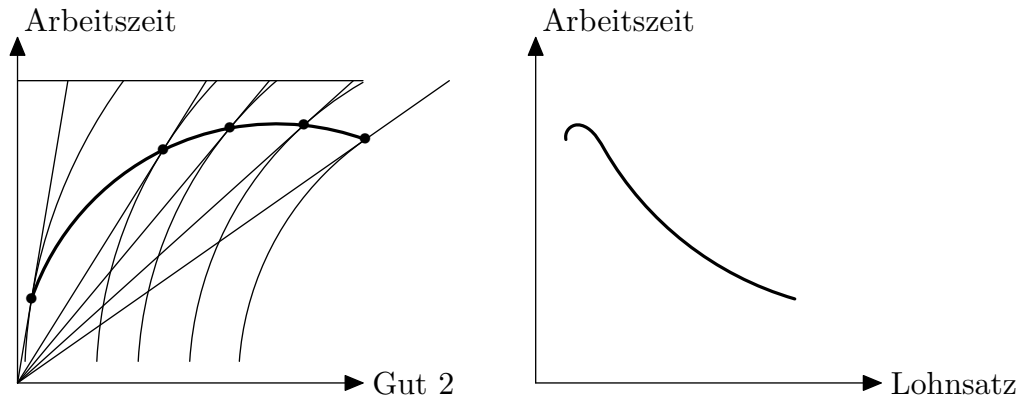
[10] Der Arbeitsmarkt ist laut Marx derjenige, welcher dem Kapitalismus sein spezifisches Gepräge gibt.

Die Wahl zwischen Konsum und Freizeit ist zugleich eine Wahl zwischen Konsum und Arbeitsangebot des Konsumenten. Jede Stunde, die er länger arbeitet, verkürzt seine Freizeit. Umgekehrt kostet ihn jede Stunde Freizeit einen Stundenlohn, den er zum Güterkauf verwenden könnte. Dieser Konsumverzicht wird als Alternativkosten oder Opportunitätskosten einer Stunde Freizeit bezeichnet. Die Budgetgerade lautet:

$$p_2 x_2 = w(1 - x_1)$$

und da $1-x_1$ das Arbeitsangebot des Konsumenten darstellt, kann die direkte Nachfragekurve nach Freizeit durch eine einfache Variablentransformation in seine individuelle Arbeitsangebotskurve übertragen werden.

Abbildung 4.17: Individuelle Arbeitsangebotskurve



Der Güterraum im linken Teildiagramm von Abbildung 4.17 besteht aus einem horizontalen Steifen, da die Arbeitszeit durch die gewählte Periodenlänge (Tag, Woche, etc.) nach oben beschränkt ist. Der zunächst ungewöhnlich anmutende Verlauf der Indifferenzkurven ist erstens auf die Vertauschung der Güterachsen und zweitens auf die angesprochene Variablentransformation von x_1 auf $1 - x_1$ zurückzuführen. Das erklärt auch den Verlauf der Budgetgeraden, die dadurch zu Halbgeraden aus dem Ursprung werden, deren Richtung durch den Lohnsatz gegeben sind. Je höher der Lohnsatz (pro Periode), desto steiler verläuft die Budgetgerade. Die Verbindungslinie aller Optimalpunkte im linken Teildiagramm stellt einen „Preis-Konsum-Pfad“ dar. Im rechten Teildiagramm ist die zugehörige „direkte Nachfragekurve“ eben die Arbeitsangebotskurve des Konsumenten dargestellt. Der kleine Haken bei niedrigen Lohnsätzen deutet an, dass das Arbeitsangebot bei extrem niedrigen Löhnen auch ein Giffen Gut sein könnte.

4.5.3 Intertemporale Konsumentscheidung

Das Szenario einer Zwei-Perioden-Planung bildet trotz seiner Schlichtheit den Einstieg in eine Reihe wichtiger Teilgebiete der Volkswirtschaftslehre wie zum Beispiel die Kapitaltheorie und die Modelle der überlappenden Generationen.

Angenommen, der Konsument plant den Konsum für zwei benachbarte Perioden. In der ersten Periode steht ihm das Einkommen y_1 zur Verfügung und in der zweiten Periode das Einkommen y_2. Das Gut, das der Konsument begehrt, unterscheidet sich nur durch die Periode, in der es konsumiert wird. Das Besondere an seiner periodenübergreifenden Planung besteht darin, dass der Konsument in der ersten Periode entweder einen Teil seines Einkommens spart, also am Kapitalmarkt zu einem bestimmten Zinssatz r verleiht, oder mehr zum Kauf des Gutes verausgabt, als er Einkommen hat und er den Differenzbetrag am Kapitalmarkt als Kredit aufnimmt, wobei der Kredit ebenfalls mit r verzinst wird.[11] In der zweiten Periode steht dann entweder die Ersparnis nebst Verzinsung zusätzlich zum Einkommen y_2 zum Kauf des Gutes 2 bereit oder der Kredit nebst Zinsdienst vermindert die Konsummöglichkeiten. Anders als in den beiden voranstehenden Anwendungen ist hier nur ein Preis r, dafür aber zwei Werte für das Einkommen vorgegeben.

Der Konsument hat nun für jede Periode eine Budgetbeschränkung zu beachten. In Periode 1 ist

$$x_1 + s = y_1$$

und in Periode 2 ist

$$y_2 + (1 + r)s = x_2$$

zu beachten. Die Größe x_1 stellt den Konsum in Periode 1 dar und x_2 den Konsum in Periode 2. Falls $s > 0$ ist der Konsument ein Gläubiger und für $s < 0$ ein Schuldner. Dazu kommen noch die üblichen Nichtnegativitätsbedingungen $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$, welche nunmehr dafür sorgen, dass der Konsument nicht zahlungsunfähig wird. Im Falle des vollkommenen Kapitalmarktes könnte sich der Konsument sonst in Periode 1 einen unbeschränkten Kredit verschaffen, alles beim Kauf des Konsumgutes ausgeben und in der zweiten Periode nur noch y_2 zurückzahlen.

Wird die Budgetrestriktion der Periode 2 nach s aufgelöst und in die der ersten Periode eingesetzt, ergibt sich die intertemporale Budgetrestriktion bzw. die Vermögensrestriktion

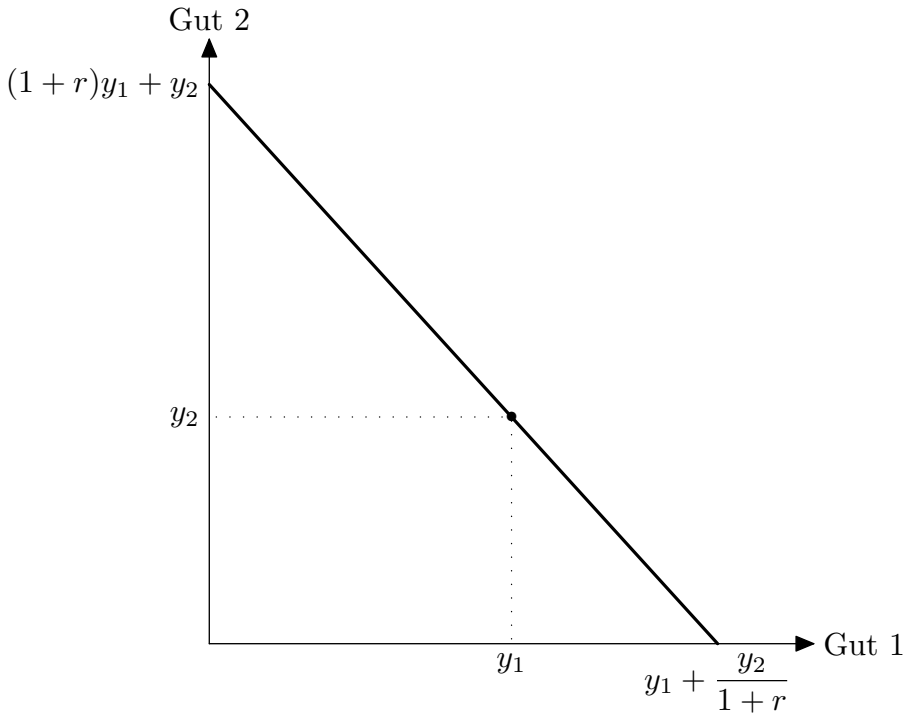
$$x_1 + \frac{x_2}{1+r} = y_1 + \frac{y_2}{1+r}$$

[11] Ein Kapitalmarkt, bei dem der Schuldnerzinssatz gleich dem Gläubigerzinssatz ist, wird vollkommener Kapitalmarkt genannt.

Auf der rechten Seite steht der Gegenwartswert des Einkommens, also das Vermögen des Konsumenten und links steht der Gegenwartswert seines Konsums.

Die intertemporale Budgetgleichung verläuft im Güterraum durch den Einkommenspunkt bzw. Ausstattungspunkt (y_1, y_2). Sie schneidet die Achse

Abbildung 4.18: Intertemporale Budgetrestriktion



des Gegenwartsgutes (Gut 1) an der Stelle

$$\left(y_1 + \frac{y_2}{1+r},\, 0\right)$$

an der der Konsument nur in der Periode 1 (in der Gegenwart) konsumiert, indem er einen Kredit in Höhe von

$$s = -\frac{y_2}{1+r}$$

aufnimmt. Der gesamte Gegenwartswert seines Einkommens fließt in den Gegenwartskonsum.

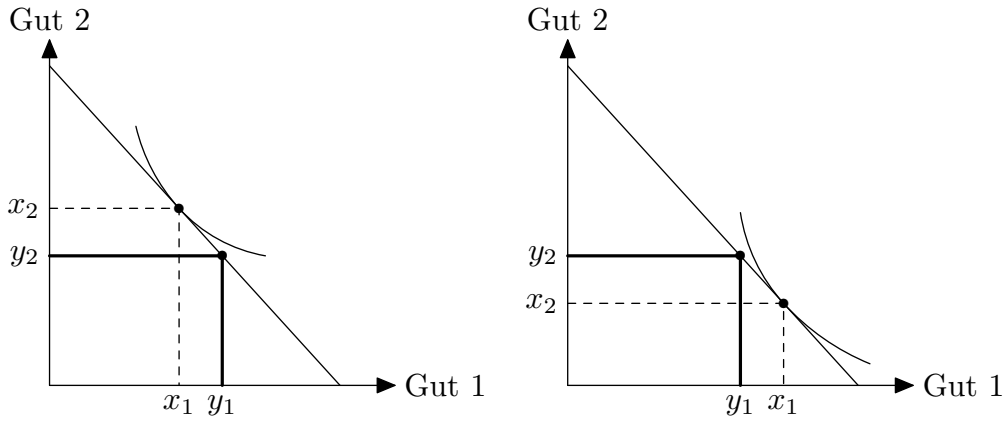
Die intertemporale Budgetgleichung schneidet die Achse des Zukunftsgutes (Gut 2) an der Stelle

$$(0,\, y_1(1+r)+y_2)$$

an der der Konsument nur in der Periode 2 konsumiert, indem er in Periode 1 sein gesamtes Einkommen spart (d.h. nicht für Güterkäufe verausgabt) und verzinslich am Kapitalmarkt anlegt.

Jeder Punkt auf der intertemporalen Budgetgeraden ist ein realiserbarer intertemporaler Verbrauchsplan. Bei Punkten links oberhalb des Aus-

Abbildung 4.19: Gläubiger oder Schuldner



stattungspunktes ist der Konsument ein Gläubiger und bei Punkten rechts unterhalb davon ist er ein Schuldner.

Die Nutzenfunktionen, die im Rahmen der intertemporalen Konsumplanung unterstellt werden, sind oft spezielle Versionen einer CES-Nutzenfunktion. Zunächst wird eine Periodennutzenfunktion $u(x)$ eingeführt, deren erste Ableitung positiv ist (um der Nicht-Sättigung Rechnung zu tragen) und deren zweite Ableitung negativ ist. Ein häufig verwendeter Funktionstyp dafür ist die sogenannte CRRA-Nutzenfunktion (Constant Relative Risk Aversion):

$$u(x_t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\eta} x_t^{1-\eta} & \text{für} \quad \eta \neq 1 \\ \log(x_t) & \text{für} \quad \eta = 1 \end{cases}$$

Die Nutzenfunktion für die beiden Perioden ist dann eine mit der Zeitpräferenzrate β gewichtete Summe der Periodennutzen

$$U = u(x_1) + \beta u(x_2)$$

4.6 Allgemeine Nachfragefunktion

Im Rahmen der partialanalytischen Betrachtung wurde bereits die direkte Nachfragekurve und die Kreuznachfragekurve geometrisch konstruiert. Die allgemeine Nachfragefunktion ist eine Funktion der drei Variablen y, p_1 und p_2. Später, im Rahmen der allgemeinen Gleichgewichtstheorie, wird sich zeigen, dass sich auch noch das Einkommen y bei einer gegebenen Anfangsausstattung eliminieren lässt, sodass die ganz allgemeine Nachfragefunktion ausschließlich von den Preisen abhängig ist. Die Behandlung von Funktionen mit mehreren Variablen ist eigentlich Gegenstand der Vorlesung Mathe 2 im kommenden Sommersemester — daher kommen hier nur einige einfache Aspekte zur Sprache, die der Übersicht und der Zusammenfassung der bisherigen Ausführungen dienen.

4.6.1 Anmerkungen zur Methode

Alles, was bisher zu den optimalen Warenkörben eines Konsumenten ausgesagt wurde, geschah im Rahmen einer sogenannten komparativ statischen Analyse. Diese Methode besteht darin, zwei oder mehrere Zustände miteinander zu vergleichen, ohne eine Erklärung dafür anzubieten, wie ein Zustand aus anderen hervorgeht (was eine Fragestellung der dynamischen Analyse ist). Auch wenn die Wortwahl, wie beispielsweise „Reaktion auf eine Preisänderung“, manchmal an eine dynamische Betrachtung erinnert, so ist doch jedesmal ein einfacher Vergleich gemeint.

Ausgangspunkt ist ein Entscheidungsmodell eines Nachfragers, dessen individuelle Präferenzen die fünf Präferenz Axiome erfüllen. Der Nachfrager — auch Konsument genannt — ist mit einem bestimmten Einkommen ausgestattet und mit bestimmten Preisen für die beiden Gütersorten konfrontiert. Gefragt wird nach dem Warenkorb, den er kauft, wenn er sich gemäß dem ökonomischen Prinzip — also als homo oeconomicus — verhält. Der Konsument wählt auf dem Hintergrund gegebener Präferenzen, seinem Einkommen und den Güterpreisen — den exogenen Variablen — einen optimalen Warenkorb — die endogenen Variablen oder Entscheidungsvariablen. Das Ergebnis seiner Entscheidung wird optimal genannt, da es die Lösung einer mathematischen Optimierungsaufgabe ist. Dies ist nicht zu verwechseln mit einer (Pareto-) optimalen Distribution.

Sodann wird gefragt, wie sich diese Entscheidung bei alternativem Einkommen oder bei alternativen Preisen eines Gutes gestaltet. Eine der exogenen Größen wird verändert, alle anderen exogenen Größen bleiben konstant. Diese Herangehensweise wird Partialanalyse genannt. Die Ergebnisse einer Partialanalyse sind nur dann akzeptabel, wenn die indirekten Einflüsse der

veränderten exogenen Größe vernachlässigbar sind. Ansonsten stellen sie lediglich eine Art Zwischenresultat im Sinne einer Nebenrechnung dar. Durch die Lehrbuchdarstellungen der Mikroökonomik verläuft eine für den Anfänger kaum wahrnehmbare Grenze zwischen partial- und totalanalytischen Betrachtungen und oftmals werden partialanalytische Aussagen in unzulässiger Weise verallgemeinert.

In den vorgehenden Abschnitten wurde die Partialanalyse in erster Linie zur Fallunterscheidung benutzt. Dabei wurden die Bezeichnungen superiore oder inferiore Güter anhand der Einkommens-Konsum-Pfade und die Begriffe substitutive oder komplementäre Güter anhand der Preis-Konsum-Pfade eingeführt. Die Engel-Kurven und die direkte Nachfragekurven sind partialanalytische Konstrukte, deren Anwendung nur unter dem genannten Vorbehalt der Vernachlässigbarkeit indirekter Einflüsse sinnvoll und gerechtfertigt ist.

Bei einer Partialanalyse wird eine exogene Größe variiert, die übrigen werden konstant gehalten. Im mathematischen Sprachgebrauch sind dies Parameter, die Ökonomen nennen dies eine ceteris paribus Klausel. Die c.p. Klausel einer Engelkurve besteht aus bestimmten, konstant gehaltenen Güterpreisen und einer fest vorgegebenen Präferenzordnung (in Gestalt einer Schar Indifferenzkurven oder einer Nutzenfunktion). Die c.p. Klausel einer direkten Nachfragekurve oder einer Kreuznachfragekurve besteht in einem fixierten Einkommen, einem konstant gehaltenen Güterpreis und einer fest vorgegebenen Präferenzordnung. Ein wichtiges Bindeglied zwischen einer Partial- und einer Totalanalyse besteht nun darin, die Beziehung zwischen Lage und Gestalt eines partialanalytischen Zusammenhangs, beispielsweise einer Engel-Kurve, und den Elementen der zugehörigen c.p. Klausel zu betrachten.

Auch ohne geometrische Konstruktion ist es nachvollziehbar, dass eine direkte Nachfragekurve eines Konsumenten um so weiter rechts außen in einem Preis-Mengen-Diagramm verläuft, je höher das Einkommen des Konsumenten ist — wenn es sich um ein superiores oder ein relativ inferiores Gut handelt. Die direkte Nachfragekurve wird ebenfalls um so weiter rechts außen verlaufen, je höher der Preis des anderen Gutes ist — wenn das andere Gut ein Substitut ist.

4.6.2 Allgemeine und spezielle Nachfragekurven

Bei jedem Einkommen y und Güterpreisen p_1, p_2 wählt der Konsument einen ganz bestimmten optimalen Warenkorb (x_1, x_2). Daher gibt es zu jeder Einkommens-Preis-Konstellation (y, p_1, p_2) zwei allgemeine Nachfragefunk-

tionen:[12]

$$x_1 = g_1(y, p_1, p_2)$$
$$x_2 = g_2(y, p_1, p_2)$$

Werden die beiden Güterpreise konstant auf $\bar{p}_1$ und $\bar{p}_2$ gehalten, erhält man zu alternativen Einkommensniveaus die Einkommens-Konsum-Kurve

$$(x_1, x_2) = (g_1(y, \bar{p}_1, \bar{p}_2), g_2(y, \bar{p}_1, \bar{p}_2))$$

im Güterraum, sowie die beiden Engel-Kurven

$$x_1 = g_1(y, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$$
$$x_2 = g_2(y, \bar{p}_1, \bar{p}_2) \ .$$

Das Gut 1 heißt superior, falls eine Einkommenssteigerung zu einer überproportionalen Nachfragesteigerung führt; ist die Nachfragesteigerung unterproportional, heißt es relativ inferior und ist sie negativ, dann heißt es absolut inferior:

$$\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{y}{x_1} \begin{cases} \geq 1 & \text{superior} \\ \in [0, 1) & \text{relativ inferior} \\ < 0 & \text{absolut inferior} \end{cases}$$

Wird das Einkommen und einer der beiden Güterpreise (z.B. der von Gut 2) konstant auf $\bar{y}$ und $\bar{p}_2$ gehalten, erhält man bei alternativen Preisen p_1 den Preis-Konsum-Pfad

$$(x_1, x_2) = (g_1(\bar{y}, p_1, \bar{p}_2), g_2(\bar{y}_1, p_1, \bar{p}_2))$$

im Güterraum, sowie eine direkte Nachfragekurve (nach x_1) und eine Kreuznachfragekurve (nach x_2)

$$x_1 = g_1(\bar{y}, p_1, \bar{p}_2)$$
$$x_2 = g_2(\bar{y}, p_1, \bar{p}_2)$$

Das Gut 1 ist ein normales Gut, falls $g_1(\bar{y}, p_1, \bar{p}_2)$ streng monoton fällt, falls die direkte Nachfragekurve jedoch ansteigende Bereiche aufweist, ist es ein Giffen Gut. Das Gut 2 ist ein Substitut zu Gut 1, falls $g_2(\bar{y}, p_1, \bar{p}_2)$ monoton ansteigt und ein Komplement, falls die Kreuznachfragekurve streng monoton fällt.

[12] Im kommenden Sommersemester wird gezeigt, wie man sich durch die Anwendung des Satzes über implizite Funktionen auf die Bedingungen erster Ordnung einer Optimierungsaufgabe Aussagen über die Existenz und ggf. die (partiellen) Ableitungen der allgemeinen Nachfragefunktionen g_1 und g_2 verschafft.

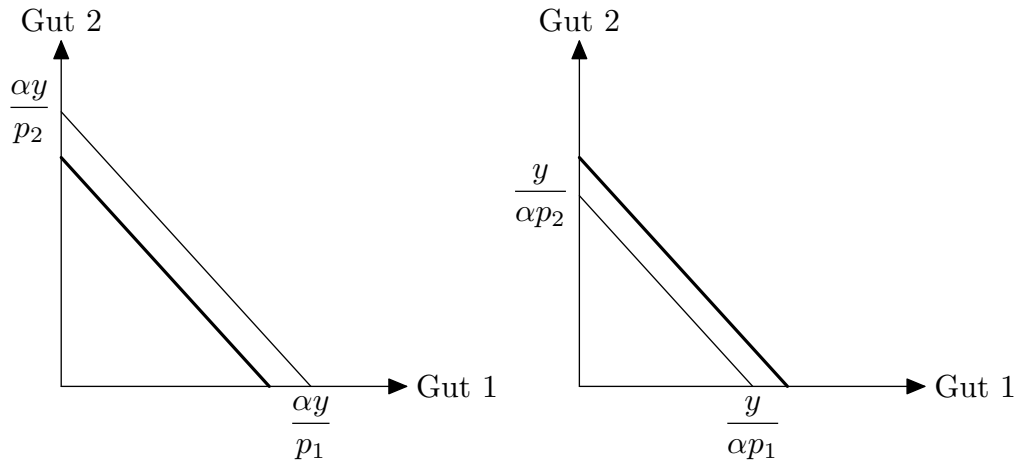
4.6.3 Eigenschaften der allgemeinen Nachfragekurven

Die allgemeinen Nachfragekurven $g_1(\cdot)$ und $g_2(\cdot)$ besitzen drei Eigenschaften.

4.6.3.1 Invarianz bei Vervielfachung aller Argumente

Wenn das Einkommen vergrößert wird, dann wird bei einem superioren Gut die nachgefragte Menge steigen. Wenn jedoch beide Preise im gleichen Ausmaß steigen, also alle exogenen Variablen um denselben Faktor vervielfacht werden, dann ändert sich der optimale Warenkorb nicht. Diese Eigenschaft wird auch als die der Nullhomogenität[13] der allgemeinen Nachfragekurven bezeichnet. Eine Erhöhung des Einkommens verlagert die Budgetgerade parallel nach rechts, und eine proportionale Erhöhung beider Preise verlagert

Abbildung 4.20: Vervielfachung von Einkommen und Preisen



die Budgetgleichung parallel nach links. Werden Einkommen und Preise also im gleichen Ausmaß vergrößert (oder verkleinert), dann heben sich die beiden Parallel-Verschiebungen gegenseitig auf.

Die Eigenschaft der Nullhomogenität der beiden allgemeinen Nachfragefunktionen wird formal beschrieben durch

$$g_1(\alpha y, \alpha p_1, \alpha p_2) = \alpha^0 g_1(y, p_1, p_2) = g_1(y, p_1, p_2)$$
$$g_2(\alpha y, \alpha p_1, \alpha p_2) = \alpha^0 g_2(y, p_1, p_2) = g_2(y, p_1, p_2)$$

für eine beliebige positive reelle Zahl α.

[13] Über homogene Funktionen im Allgemeinen wird detailliert in der Vorlesung Mathe 2 im kommenden Sommersemester informiert.

4.6.3.2 Unabhängigkeit vom gewählten Nutzenindex

Der Funktionswert der Nutzenfunktion im Optimum ist für den Konsumenten eigentlich nebensächlich, da — wie wir im zweiten Kapitel gezeigt haben — die Nutzenfunktion nur ordinal ist. Man darf also diese Zahlen, die lediglich die Rangfolge von Güterbündeln kennzeichnen, monoton steigend transformieren, ohne dass sich dadurch an der Darstellung der Präferenzordnung des Konsumenten etwas ändert und ohne dass dies einen Einfluss auf seine Wahl des optimalen Warenkorbes ausübt.

Statt eines allgemeinen Beweises[14] betrachten wir ein Beispiel. Der optimale Warenkorb — und damit die beiden allgemeinen Nachfragefunktionen — sind für eine Produkt-Nutzenfunktion $x_1 x_2$ bereits bekannt:

$$x_1 = \frac{1}{2}\,\frac{y}{p_1} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \frac{1}{2}\,\frac{y}{p_2}$$

Nun wird der optimale Warenkorb der logarithmierten Produkt-Nutzenfunktion $\log(x_1 x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$ gesucht. Er sollte mit dem oben genannten übereinstimmen, wenn die beiden allgemeinen Nachfragekurven unabhängig vom speziell gewählten Nutzenindex sind. Da

$$x_1 = \lambda\,\frac{y}{p_1} \qquad \text{und} \qquad x_2 = (1-\lambda)\,\frac{y}{p_2}$$

ist λ so zu bestimmen, dass der Ausdruck

$$\log\left(\lambda\,\frac{y}{p_1}\right) + \log\left((1-\lambda)\,\frac{y}{p_2}\right)$$

maximal wird. Die Bedingung erster Ordnung verlangt, dass die Ableitung nach λ gleich Null wird, also

$$\frac{1}{\lambda\,\dfrac{y}{p_1}}\,\frac{y}{p_1} - \frac{1}{(1-\lambda)\,\dfrac{y}{p_2}}\,\frac{y}{p_2} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Da die Budgetanteile einer logarithmieren Produkt-Nutzenfunktion dieselben sind wie bei der ursprünglichen Produkt-Nutzenfunktion, stimmen die allgemeinen Nachfragefunktionen in beiden Fällen überein.

[14] Der Beweis müsste das Lagrange Verfahren mit einer abstrakten Nutzenfunktion benutzen. Dies wird jedoch erst im kommenden Sommersemester behandelt.

4.6.3.3 Ausschöpfung des Budgets

Diese letzte wesentliche Eigenschaft der allgemeinen Nachfragefunktionen besagt, dass sie immer ihre eigene Budgetrestriktion mit Gleichheit erfüllen. Für alle positiven Werte y, p_1 und p_2 gilt:

$$p_1 g_1(y, p_1, p_2) + p_2 g_2(y, p_1, p_2) = y$$

Diese Eigenschaft ist darauf zurückzuführen, dass die Präferenzen des Konsumenten das Axiom der Nicht-Sättigung erfüllen. Daher erfüllen alle optimalen Güterbündel die jeweilige Budgetrestriktion mit Gleichheit.

Wir wollen diese Eigenschaft anhand den beiden allgemeinen Nachfragekurven bei einer CES-Nutzenfunktion prüfen (nicht beweisen). Die beiden allgemeinen Nachfragefunktionen lauten in diesem Fall

$$x_1 = g_1(y, p_1, p_2) = \frac{y}{p_1 + \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{1+\beta}}}$$

$$x_2 = g_2(y, p_1, p_2) = \frac{y}{p_2} - \frac{y}{p_2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}} p_2}$$

und es ist keineswegs ersichtlich, dass $p_1 g_1 + p_2 g_2 = y$.

$$\begin{aligned} p_1 g_1 + p_2 g_2 &= \frac{p_1 y}{p_1 + \left(\frac{p_1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} p_2^{\frac{\beta}{1+\beta}}} + \frac{p_2 y}{p_2} - \frac{p_2 y}{p_2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}} p_2} \\ &= y + \frac{y}{1 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}}} - \frac{y}{1 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1+\beta}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}}} \\ &= y \end{aligned}$$

4.6.4 Indirekte Nutzenfunktion

Werden die beiden allgemeinen Nachfragefunktionen in die Nutzenfunktion eingesetzt, dann ergibt sich die sogenannte indirekte Nutzenfunktion

$$V(y, p_1, p_2) = u(g_1(y, p_1, p_2), g_2(y, p_1, p_2))$$

Die indirekte Nutzenfunktion[15] ordnet jedem Tripel aus Einkommen y und Güterpreisen p_1 und p_2 den maximalen Nutzenindex zu, den der Konsument bei dieser Konstellation der exogenen Variablen erreichen kann.

[15] Die indirekte Nutzenfunktion ist ein Beispiel für eine Verkettung von Funktionen mit mehreren Variablen. Dazu wird im kommenden Sommersemester noch einiges zu sagen sein.

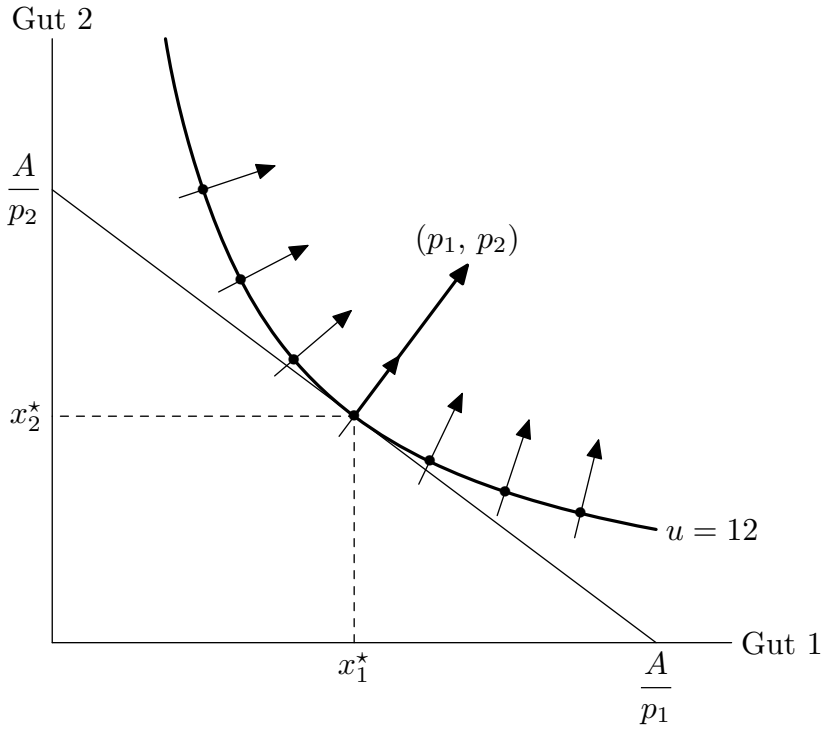
4.7 Allgemeine Ausgabenfunktion

Die allgemeine Nachfragefunktionen basieren auf dem Maximalprinzip, die allgemeine Ausgabenfunktion hingegen basiert auf dem Minimalprinzip. Ausgangspunkt der allgemeinen Ausgabenfunktion ist das Ausgabenminimum bei gegebenen Preisen und gegebenem Nutzenniveau. Gefragt wird nach dem Güterbündel, das dem Konsumenten bei gegebenen Güterpreisen ein bestimmtes Nutzenniveau zu minimalen Ausgaben verschafft.

4.7.1 Geometrische Konstruktion

Bei der geometrischen und analytischen Betrachtung des nutzenmaximalen Warenkorbes wanderten wir entlang einer gegebenen Budgetgeraden, indem die Budgetanteile gegenläufig variierten, bis wir zu einem Berührpunkt mit einer Indifferenzkurve gelangten. Hier soll umgekehrt solange entlang einer

Abbildung 4.21: Ausgabenminimales Güterbündel

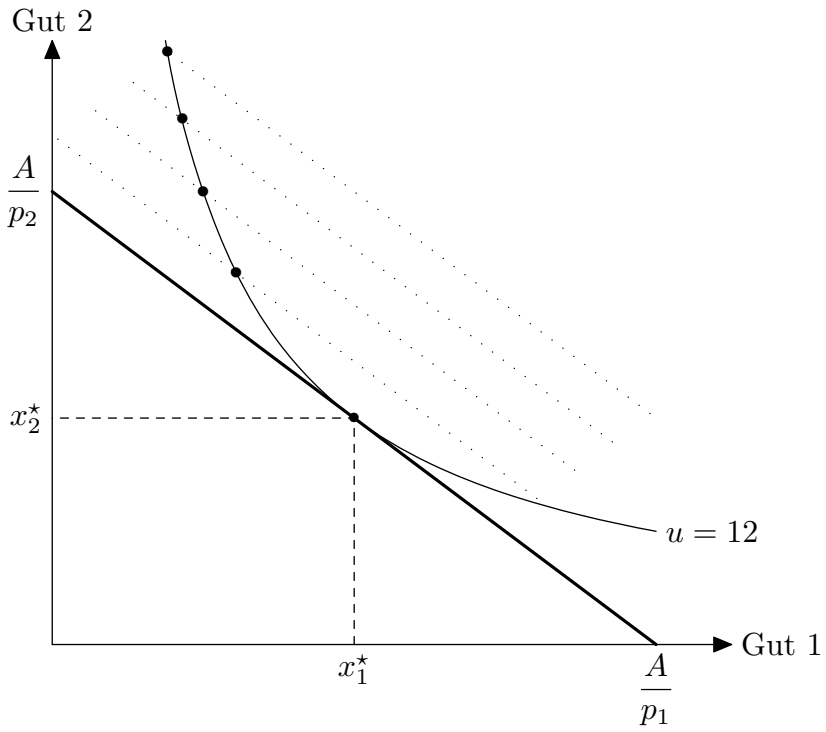


bestimmten Indifferenzkurve gewandert werden, bis eine durch den Preisvektor vorgegebene Präferenzrichtung erreicht ist. Die Tangente an dieser Stel-

le beschreibt dann die minimalen Ausgaben. Bei dem Güterbündel $(x_1^\star, x_2^\star)$ stimmen Präferenzrichtung der Indifferenzkurve $u = 12$ und Richtung des Preisvektors überein. Die Tangente an dieser Stelle ist die Isoausgabenlinie mit minimalem Niveau. Aus ihren Schnittpunkten mit den beiden Güterachsen ist das minimale Ausgabenniveau A ablesbar.

Eine alternative Konstruktion besteht darin, die Isoausgabenlinie, eine Gerade, die senkrecht zum Preisvektor verläuft, solange parallel zu verschieben, bis sie eine fest vorgegebene Indifferenzkurve berührt.

Abbildung 4.22: Parallelverschiebung einer Isoausgabenlinie



Vom Ergebnis her stimmen diese beiden Verfahren mit dem in Abbildung 4.3 S. 98 überein. Im nutzenmaximalen Güterbündel (x_1^*, x_2^*) und im ausgabenminimalen Güterbündel $(x_1^\star, x_2^\star)$ sind Präferenzrichtung und Richtung des Preisvektors gleich. Der Unterschied zwischen den beiden optimalen Warenkörben besteht in der Art und Weise ihrer Konstruktion. Beim nutzenmaximalen Güterbündel ist die Budgetgerade fest vorgegeben und diejenige Indifferenzkurve gesucht, welche sie berührt. Beim ausgabenminimalen Güterbündel ist die Indifferenzkurve fest vorgegeben, sowie die Richtung der Isoausgabenlinie und das Ausgabenniveau gesucht, bei dem eine Isoausga-

benlinie die Indifferenzkurve berührt.

4.7.2 Berechnung des Ausgabenminimums

Es sollen durch eine geeignete Wahl der Gütermengen x_1 und x_2 die Konsumausgaben $A = p_1x_1 + p_2x_2$ bei vorgegebenen Güterpreisen p_1 und p_2 minimiert werden, wobei das Güterbündel dem Konsumenten ein bestimmtes Nutzenniveau u verschaffen soll.

Wir führen die Berechnung wieder anhand einer Produkt-Nutzenfunktion und einer CES-Nutzenfunktion durch.

4.7.2.1 Produkt-Nutzenfunktion

Eine Indifferenzkurve der Produkt-Nutzenfunktion zum Nutzenniveau $u > 0$ ist gegeben durch

$$x_1x_2 = u \quad \rightsquigarrow \quad x_2 = \frac{u}{x_1} \qquad \text{für } x_1 > 0\,.$$

Nun ist ein Güterbündel

$$\left(x_1,\, \frac{u}{x_1}\right)$$

zu wählen, das den Ausdruck

$$p_1x_1 + p_2\frac{u}{x_1}$$

minimiert. Die Bedingung erster Ordnung verlangt, dass die Ableitung nach x_1 gleich Null wird.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[p_1x_1 + p_2\frac{u}{x_1}\right] = p_1 - \frac{p_2u}{x_1^2} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad x_1^\star = +\sqrt{u\,\frac{p_2}{p_1}}$$

Da $x_2^\star = u/x_1^\star$ ergibt sich als ausgabenminimales Quantum der Gütersorte 2

$$x_2^\star = +\sqrt{u\,\frac{p_1}{p_2}}$$

Man überprüft direkt, dass bei einem Nutzenniveau $u = 12$ und den Güterpreisen $p_1 = 3$ und $p_2 = 4$ das ausgabenminimale Güterbündel $(x_1^\star,\, x_2^\star) = (4,\, 3)$ lautet. Die minimalen Ausgaben selbst belaufen sich dann auf

$$A = p_1x_1^\star + p_2x_2^\star = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24\,.$$

Wird ein Nutzenniveau $u = 12$ einer Produkt-Nutzenfunktion und zwei Güterpreise $p_1 = 3$ und $p_2 = 4$ vorgegeben, dann ergibt sich ein kostenminimales Güterbündel $(x_1^\star, x_2^\star) = (4, 3)$, welches zu den Konsumausgaben $A = 24$ führt. Wird hingegen ein Einkommen $y = 24$ und dieselben Güterpreise $p_1 = 3$ und $p_2 = 4$ vorgegeben, dann ergibt sich ein nutzenmaximales Güterbündel $(x_1^*, x_2^*) = (4, 3)$, welches dem Konsumenten ein Nutzenniveau von $u = 12$ verschafft. Damit ist es vom Ergebnis her gleich, ob das Maximal- oder das Minimalprinzip angewandt wird, wenn jedesmal dieselben Güterpreise und beim Maximalprinzip ein bestimmtes Einkommen und beim Minimalprinzip ein bestimmtes Nutzenniveau vorgegeben wird. Im Abschnitt über die allgemeine Ausgabenfunktion und indirekte Nutzenfunktion wird diese Beziehung zwischen dem vorzugebenden Einkommen und dem vorzugebenden Nutzenniveau geklärt, denen jeweils derselbe optimale Warenkorb zugrunde liegt.

4.7.2.2 CES-Nutzenfunktion

Nicht zuletzt um den Umgang mit Potenzen zu üben, wird nun das Ausgabenminimum anhand einer CES-Nutzenfunktion berechnet. Vorgegeben sind wieder die beiden Güterpreise p_1 und p_2 sowie ein Nutzenniveau u. Die Indifferenzkurve der CES-Nutzenfunktion zum Niveau z ist gegeben durch

$$u = \left[\alpha x_1^{-\beta} + x_2^{-\beta}\right]^{\frac{-1}{\beta}} \quad ,$$

Auflösen nach x_2

$$\begin{aligned} u^{-\beta} &= \left[\alpha x_1^{-\beta} + x_2^{-\beta}\right] \\ x_2^{-\beta} &= u^{-\beta} - \alpha x_1^{-\beta} \\ x_2 &= \left[u^{-\beta} - \alpha x_1^{-\beta}\right]^{\frac{-1}{\beta}} \end{aligned}$$

und Einsetzen in die Isoausgabenlinie

$$p_1 x_1 + p_2 x_2$$

liefert den zu minimierenden Ausdruck

$$p_1 x_1 + p_2 \left[u^{-\beta} - \alpha x_1^{-\beta}\right]^{\frac{-1}{\beta}}$$

dessen Ableitung nach x_1 im Ausgabenminimum gleich Null sein muss.

Die Ableitung der Isokostenlinie nach x_1 lautet

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left[p_1x_1 + p_2\left[u^{-\beta} - \alpha x_1^{-\beta}\right]^{\frac{-1}{\beta}}\right] = p_1 - p_2\left[u^{-\beta} - \alpha x_1^{-\beta}\right]^{\frac{-1}{\beta}-1}\alpha x_1^{-\beta-1}$$

Null setzen und nach x_1 Auflösen ergibt

$$\begin{aligned}
x_1^{1+\beta} &= \alpha\frac{p_2}{p_1}\left(u^{-\beta} - \alpha x_1^{-\beta}\right)^{-\frac{1+\beta}{\beta}} \\
x_1^{(1+\beta)\frac{-\beta}{1+\beta}} &= \left(\alpha\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{\beta}{1+\beta}}\left(u^{-\beta} - \alpha x_1^{-\beta}\right) \\
x_1^{-\beta}\left[1 + \alpha\left(\alpha\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{-\beta}{1+\beta}}\right] &= \left(\alpha\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{-\beta}{1+\beta}}u^{-\beta} \\
x_1^\star &= u\left[\alpha + \left(\alpha\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}}\right]^{\frac{1}{\beta}}
\end{aligned}$$

Für das ausgabenminimale Quantum der Gütersorte 2 ergibt sich

$$x_2^\star = u\left[1 + \alpha\left(\frac{p_1}{p_2}\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{1+\beta}}\right]^{\frac{1}{\beta}}$$

Nachdem das Ausgabenminimum sowohl geometrisch, als auch analytisch dargestellt ist, folgt als nächstes die Partialanalyse. Es wird gefragt, wie sich das Ausgabenminimum bei alternativen Preisen und bei alternativen Nutzenniveaus gestaltet. Die kompensierte Nachfragekurve und die im folgenden Abschnitt dargestellte äquivalente Einkommensvariation sind zentrale Instrumente der Kosten-Nutzen-Analyse[16] und der Wohlfahrtsökonomik.

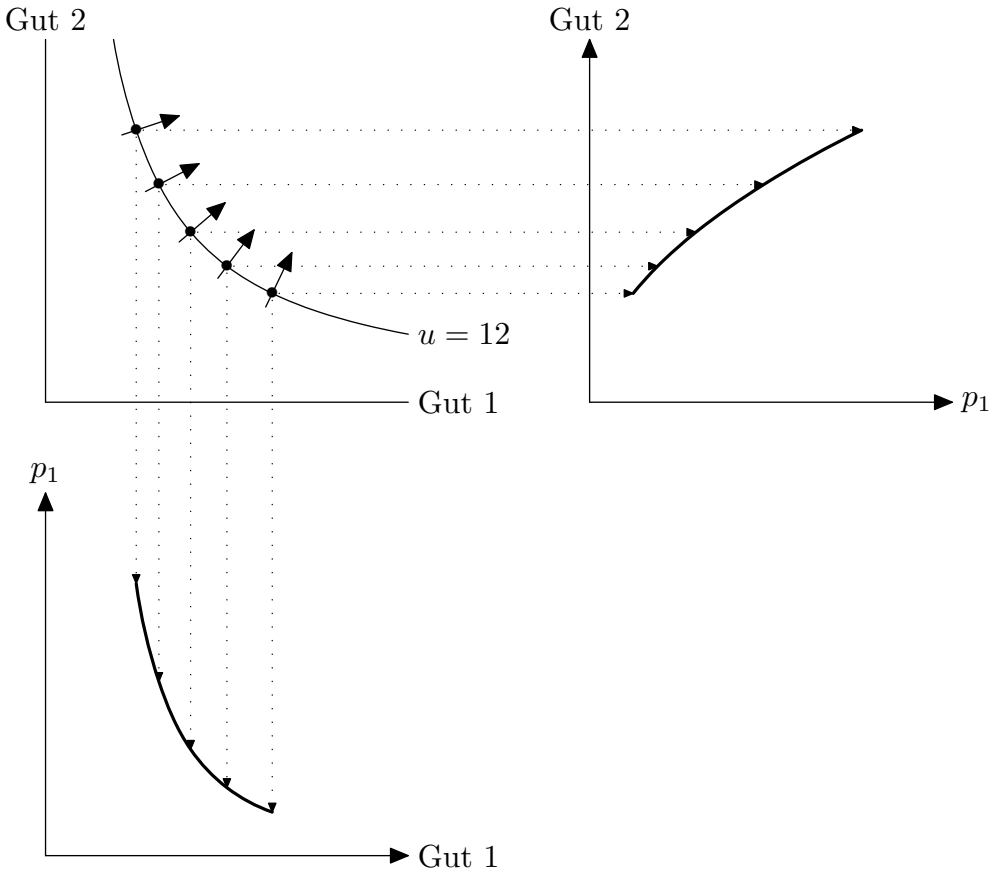
4.7.3 Kompensierte Nachfragekurven

Wird ein Preis variiert und der andere Preis sowie das Nutzenniveau konstant gehalten (c.p. Klausel), denn entsteht ein Preis-Ausgaben-Pfad im Güterraum. Dieser ist mit dem Preis-Konsum-Pfad eng verwandt, dort wird jedoch das Einkommen konstant gehalten und beim Preis-Ausgaben-Pfad das Nutzenniveau.

[16] In den USA sind bei praktisch allen öffentlichen Investitionen Kosten-Nutzen-Analysen vorgeschrieben. In der Europäischen Gemeinschaft werden sie ebenfalls in zunehmendem Maße — beispielsweise zur Abschätzungen der Folgewirkungen im Zuge der Einführung neuer Techniken — erstellt. Daher gehören Kosten-Nutzen-Analysen der verschiedensten Art zu einem der häufigsten Aufgabengebiete von Ökonomen.

Zu einem Preis-Konsum-Pfad wurde eine direkte und eine Kreuznachfragekurve konstruiert. Beim Preis-Ausgaben-Pfad wird die der direkten Nachfragekurve entsprechende Kurve als kompensierte Nachfragekurve oder als einkommenskompensierte Nachfragekurve nach Hicks bezeichnet. Die kompensierte Nachfragekurve stellt die direkte Nachfrage *ohne den Einkommenseffekt der Preisvariation* dar. Sie ist in Abbildung 4.23 im Teildiagramm links unten dargestellt. Die der Kreuznachfragekurve entsprechende hat kei-

Abbildung 4.23: Preis-Ausgaben-Pfad und kompensierte Nachfragekurven



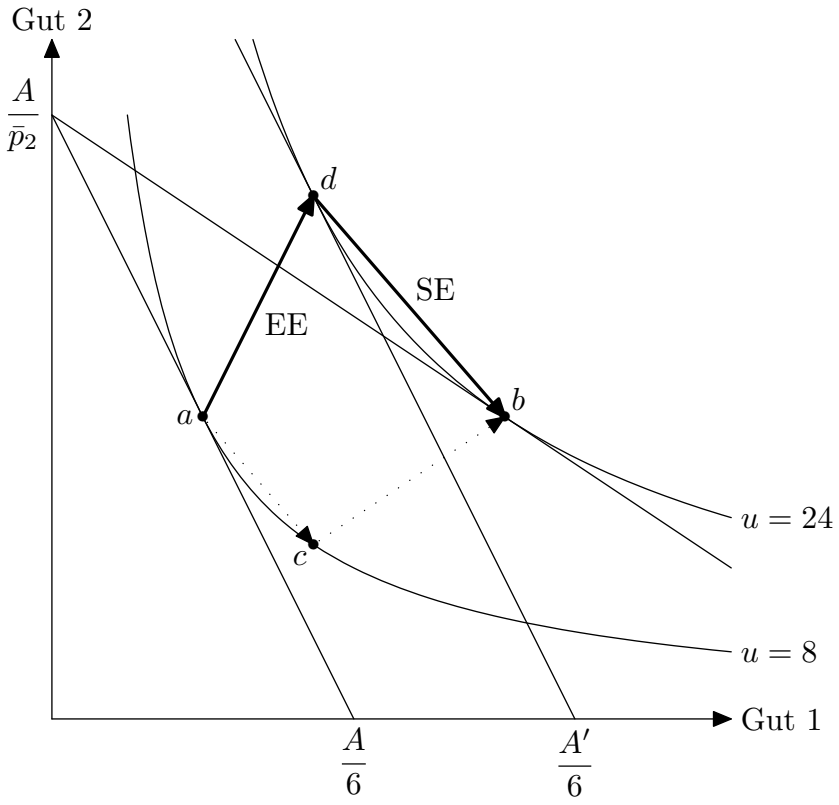
nen eigenen Namen, ihr Anstieg gibt Aufschluss darüber, ob die beiden Güter *Netto-* Substitute oder *Netto-* Komplemente sind. Bei streng konvexen Indifferenzkurven sind die Güter immer Netto-Substitute.

4.7.4 Äquivalente Einkommensvariation

Wird das Nutzenniveau variiert, die beiden Güterpreise konstant gehalten, und nach dem jeweiligen Ausgabenminimum gefragt, dann ergibt sich die sogenannte äquivalente Einkommensvariation. Sie stellt jenen Geldbetrag dar, der dem Konsumenten gegeben (oder entzogen) werden kann, damit bei ihm eine bestimmte Nutzenänderung ausgelöst wird. Diese Partialanalyse entspricht der Einkommensvariation bei der allgemeinen Nachfragekurve.

Wir hatten bei der Zerlegung einer Preisänderung in einen Substitutions- und in einen Einkommenseffekt in Abbildung 4.13 S. 113 zuerst eine Wanderung entlang der alten Indifferenzkurve vorgenommen — also den Substitutionseffekt bzw. die kompensierte Nachfrage betrachtet — und anschließend eine Parallelverschiebung bis zur neuen Indifferenzkurve vorgenommen. Die

Abbildung 4.24: Alternativer Einkommens- und Substitutionseffekt



äquivalente Einkommensvariation erlaubt es die Reihenfolge dieser Zerlegung umzukehren, d.h. zunächst wird — bei den alten Preisen — der Weg von der

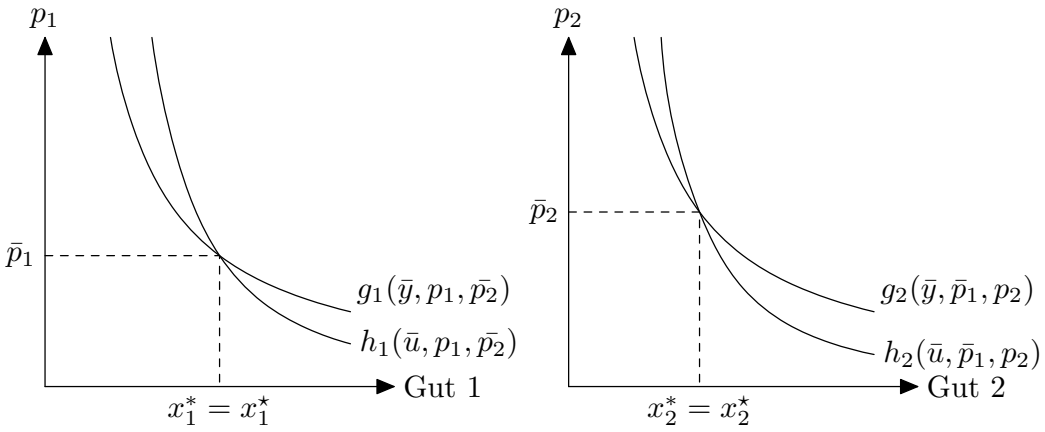
alten zur neuen Indifferenzkurve zurückgelegt — das ist die äquivalente Einkommensvariation von a nach d — und anschließend wird auf der neuen Indifferenzkurve der Weg von d nach b zum neuen Optimum zurückgelegt. In Abbildung 4.24 ist die ursprüngliche Zerlegung in Einkommens- und Substitutionseffekt zum Vergleich eingetragen. Man erkennt, dass beide Arten den Gesamteffekt auf ganz unterschiedliche Art in die beiden Teileffekte aufspalten. Im nächsten Abschnitt wird noch eine dritte Art der Zerlegung, die sogenannte Slutsky-Zerlegung besprochen.

4.7.5 Ausgaben- und indirekte Nutzenfunktion

Die allgemeine Ausgabenfunktion A ordnet jedem Tripel aus Nutzenniveau u und Güterpreisen p_1 und p_2 die minimalen Ausgaben $A = p_1 x_1^\star + p_2 x_2^\star$ zu, die der Konsument aufwenden muss, will er bei den genannten Güterpreisen das Nutzenniveau u erreichen. Die allgemeine Ausgabenfunktion ist somit der Wert der Zielfunktion beim Minimieren der Ausgaben. Sie wird von den drei Variablen (exogenen Größen) u, p_1 und p_2 beeinflusst. Wird das Nutzenniveau u und ein Güterpreis — beispielsweise p_2 — konstant gehalten, dann ergibt sich eine sogenannte kompensierte Nachfragekurve $x_1 = h_1(\bar{u}, p_1, \bar{p_2})$. Diese kompensierte Nachfrage stellt die direkte Nachfrage ohne den Einkommenseffekt dar. Die äquivalente Einkommensvariation macht eine Aussage darüber, wie die minimalen Ausgaben mit dem Nutzenniveau — bei konstanten Preisen — variieren.

Der Beziehung zwischen allgemeiner Ausgaben- und indirekter Nutzenfunktion kommt man am einfachsten auf die Spur, wenn man je eine direkte

Abbildung 4.25: Direkte und kompensierte Nachfragekurven



Nachfragekurve $x_i = g_i(\bar{y}, p_1, \bar{p}_2)$ und eine kompensierte Nachfragekurve $x_i = h_i(\bar{u}, p_1, \bar{p}_2)$ für dasselbe Gut i $(i = 1, 2)$ betrachtet. Entlang den direkten Nachfragekurven ist das Einkommen konstant und entlang den kompensierten Nachfragekurven ist das Nutzenniveau konstant. Weiterhin ist bei beiden der Preis des anderen Gutes konstant, während der Preis von Gut i variabel ist. Da die kompensierten Nachfragekurven *keinen* Einkommenseffekt aufweisen, verlaufen sie für superiore (oder relativ inferiore Güter) steiler als die jeweiligen direkten Nachfragekurven. Je eine direkte und eine kompensierte Nachfragekurve schneiden sich bei einem bestimmten Preis $\bar{p}_i$.

Die beiden Schnittpunkte sind nicht willkürlich, wie nun gezeigt werden soll. Angenommen, die Funktionen $g_1(\bar{y}, p_1, \bar{p}_2)$ und $h_1(\bar{u}, p_1, \bar{p}_2)$ schneiden sich beim Preis $\bar{p}_1$,

$$g_1(\bar{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = h_1(\bar{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$$

so wie im linken Teildiagramm von Abbildung 4.25 dargestellt. Die Funktionen $g_2(\bar{y}, \bar{p}_1, p_2)$ und $h_2(\bar{u}, \bar{p}_1, p_2)$ sollen sich aber beim Preis $\hat{p}_2$ schneiden,

$$g_2(\bar{y}, \bar{p}_1, \hat{p}_2) = h_2(\bar{u}, \bar{p}_1, \hat{p}_2)$$

anders als im rechten Teildiagramm von Abbildung 4.25. Es ist nun zu zeigen, dass $\hat{p}_2 = \bar{p}_2$ gelten muss. Die beiden Güterbündel

$$(g_1(\bar{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2), g_2(\bar{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)) \qquad \text{und}$$
$$(g_1(\bar{y}, \bar{p}_1, \hat{p}_2), g_2(\bar{y}, \bar{p}_1, \hat{p}_2))$$

liegen auf Budgetgeraden, die möglicherweise unterschiedliche Richtungen, aber dasselbe extreme Güterbündel $(\bar{y}/\bar{p}_1, 0)$ aufweisen. Weiterhin schneiden beide direkten Nachfragefunktionen eine zugehörige kompensierte Nachfragefunktion, die für dasselbe Nutzenniveau $\bar{u}$ aufgestellt sind. Folglich muss sowohl die Budgetgerade $\bar{y} = \bar{p}_1 x_1 + \bar{p}_2 x_2$ als auch $\bar{y} = \bar{p}_1 x_1 + \hat{p}_2 x_2$ dieselbe Indifferenzkurve zum Niveau u berühren, das ist aber nur für $\hat{p}_2 = \bar{p}_2$ der Fall.

Ganz allgemein ist die allgemeine Ausgabenfunktion dual zur indirekten Nutzenfunktion, d.h. es gilt

$$A(V(y, p_1, p_2), p_1, p_2) = y$$
$$V(A(u, p_1, p_2), p_1, p_2) = u$$

4.7.6 Allgemeine und kompensierte Nachfragefunktionen

Die Schnittpunkte zwischen direkten und kompensierten Nachfragekurven der beiden Güter sind nicht beliebig. Dies vererbt sich an die allgemeinen

Nachfragekurven. Zwischen den kompensierten und allgemeinen Nachfragekurven gibt es folgende Beziehungen:

$$h_1(u, p_1, p_2) = g_1(A(u, p_1, p_2), p_1, p_2)$$
$$h_2(u, p_1, p_2) = g_2(A(u, p_1, p_2), p_1, p_2)$$

4.8 Slutsky-Gleichung

Wenn sich der Preis eines Gutes ändert, dann kann die daraus resultierende Änderung der nachgefragten Menge des Gutes in einen Substitutionseffekt und in einen Einkommenseffekt zerlegt werden. Bisher kennen wir bereits zwei geometrische Arten der Zerlegung:

1. anhand der kompensierten Nachfrage
2. anhand der äquivalenten Einkommensvariation

so wie in Abbildung 4.24 S. 134 dargestellt. Nun soll noch eine dritte geometrische Art der Zerlegung eingeführt werden, die im Lehrbuch von Varian (1999, S. 129 ff) als Slutsky-Zerlegung bezeichnet wird.

Die analytische Zerlegung des Gesamteffektes, Δx, einer partiellen Änderung eines Güterpreises auf die nachgefragte Menge des Gutes in einen Substitutionseffekt, Δx^s, und in einen Einkommenseffekt, Δx^e bezeichnet man als Slutsky-*Gleichung*. Jede der drei geometrischen Zerlegungen kann demnach als eine besondere Slutsky-Gleichung angeschrieben werden. Man hat also scharf zwischen *einer* Slutsky-Gleichung und *der* Slutsky-Zerlegung zu unterscheiden. Um der Begriffverwirrung vorzubeugen, werden wir zunächst die Slutsky-Gleichungen für die beiden bereits bekannten geometrischen Arten der Zerlegung behandeln, bevor die wir uns der Slutsky-Zerlegung und der dazugehörigen Slutsky-Gleichung zuwenden.

4.8.1 Slutsky-Gleichung und kompensierte Nachfrage

Angenommen, der Preis von Gut 1 sinkt um $\Delta p_1 = \hat{p}_1 - \bar{p}_1$ von $\bar{p}_1$ auf $\hat{p}_1$, während der andere Güterpreis auf $\bar{p}_2$ verharrt und der Konsument weiter das Einkommen $\bar{y}$ zur Verfügung hat. Der alte optimale Warenkorb sei, wie in den entsprechenden Abbildungen (4.13, bzw. 4.24 S. 134) $a = (a_1, a_2)$ und der neue, beim geänderten Preis $\hat{p}_1$ sei $b = (b_1, b_2)$. Der Warenkorb a verschafft dem Konsumenten ein Nutzenniveau in Höhe von $\bar{u}$, während das Güterbündel b auf der Indifferenzkurve zum Niveau $\hat{u}$ liegt. Die Differenz der nachgefragten Menge des Gutes 1 $\Delta x_1 = b_1 - a_1$ soll nun durch Heranziehen

der kompensierten Nachfrage in einen Substitutionseffekt $\Delta x_1^s = c_1 - a_1$ und einen Einkommeseffekt $\Delta x_1^e = b_1 - c_1$ aufgespalten werden. Der Substitutionseffekt bei beiden Gütern ist in Abbildung 4.13 als Vektor von a nach dem Güterbündel c gekennzeichnet und der Einkommenseffekt beider Güter als Vektor von c nach b. Bei der Slutsky-Gleichung wird aber nur der Gesamteffekt für das Gut dessen eigener Preis sich ändert — in unserem Fall also Gut 1 — betrachtet. Wir haben folgende Funktionsauswertungen:

$$\begin{aligned}
a_1 &= g_1(\bar{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = h_1(\bar{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) = g_1(A(\bar{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2), \bar{p}_1, \bar{p}_2) \\
b_1 &= g_1(\bar{y}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) = h_1(\hat{u}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) = g_1(A(\hat{u}, \hat{p}_1, \bar{p}_2), \hat{p}_1, \bar{p}_2) \\
c_1 &= h_1(\bar{u}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) = g_1(A(\bar{u}, \hat{p}_1, \bar{p}_2), \hat{p}_1, \bar{p}_2)
\end{aligned}$$

Die Slutsky-Gleichung lautet also:

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 = b_1 - a_1 = [c_1 - a_1] + [b_1 - c_1] &= \Delta x_1^s + \Delta x_1^e \\
g_1(\bar{y}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) - g_1(\bar{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) &= [h_1(\bar{u}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) - h_1(\bar{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)] \\
&\quad + [h_1(\hat{u}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) - h_1(\bar{u}, \hat{p}_1, \bar{p}_2)]
\end{aligned}$$

Bei der alternativen Zerlegung (vgl. Abbildung 4.24 S. 134) wird zunächst der Einkommenseffekt von a nach d abgespalten und danach der Substititionseffekt von d nach b vollzogen. Die erste Komponente d_1 des Güterbündels d kann geschrieben werden als

$$d_1 = h_1(\hat{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)$$

und die Slutsky-Gleichung lautet in diesem Fall:

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 = b_1 - a_1 = [d_1 - a_1] + [b_1 - d_1] &= \Delta x_1^e + \Delta x_1^s \\
g_1(\bar{y}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) - g_1(\bar{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) &= [h_1(\hat{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) - h_1(\bar{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)] \\
&\quad + [h_1(\hat{u}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) - h_1(\hat{u}, \bar{p}_1, \bar{p}_2)]
\end{aligned}$$

Im nächsten Schritt sollen die Slutsky-Gleichungen mittels Differenzen- und Differentialquotienten angeschrieben werden. Dazu ist es aber erforderlich, zunächst den Hilfssatz von Hotelling zu zeigen.

4.8.2 Hilfssatz von Hotelling

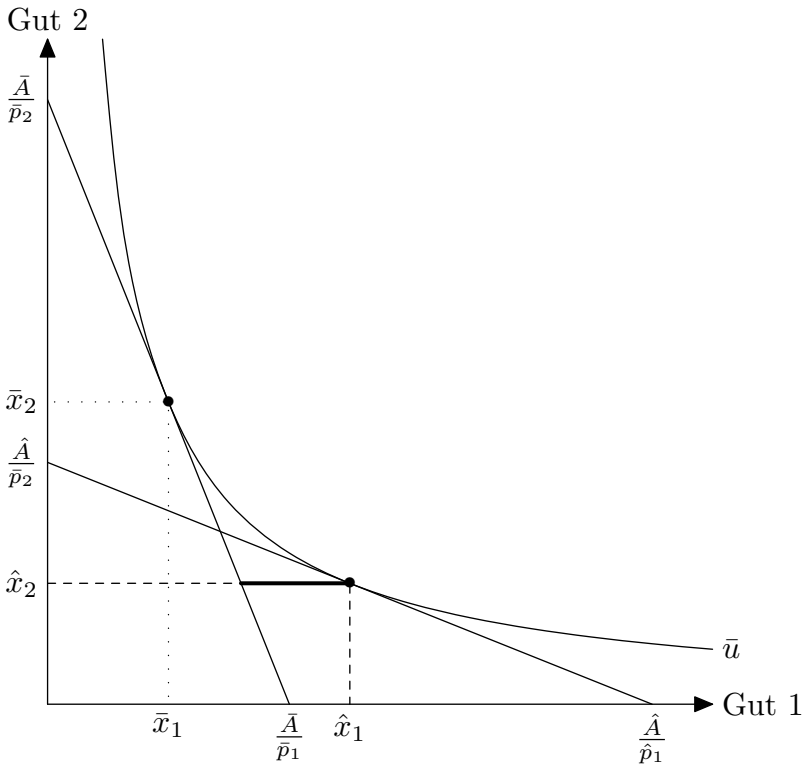
Der Hilfssatz von Hotelling[17] besagt, dass die Ableitung der allgemeinen Ausgabenfunktion nach einem Preis p_j gerade gleich der optimalen Menge des

[17] Im Lehrbuch von Schumann et al. (1999, S. 77) wird diese Beziehung als Shephard's Lemma bezeichnet. Wir haben uns an die theoriegeschichtlich korrekte Benennung nach Hotelling entschieden. Der Hilssatz von Shephard bezieht sich auf eine analoge Beziehung zwischen der Produktion und den Kosten bei einer Firma. Beide Hilfssätze sind spezielle Anwendungen des Satzes über die Umhüllende, welcher im kommenden Sommersemester in Mathe 2 ausführlich behandelt wird.

Gutes j ist. Für endliche Differenzen gilt die Aussage nur annähernd.

Wir betrachten die allgemeine Ausgabenfunktion A beim Nutzenniveau $\bar{u}$ dem fest gehaltenen Preis $\bar{p}_2$ und den beiden Preisen $\bar{p}_1$ und $\hat{p}_1$. In Abbildung

Abbildung 4.26: Abschätzung einer Ausgabenänderung



4.26 ist eine solche Ausgabenänderung bei einer partiellen Preissenkung bei Gut 1 graphisch dargestellt. Es gilt

$$\begin{aligned}\bar{A} - \hat{A} &= \bar{p}_1\bar{x}_1 + \bar{p}_2\bar{x}_2 - \hat{p}_1\hat{x}_1 - \bar{p}_2\hat{x}_2 \\ &= \bar{p}_1\bar{x}_1 - \hat{p}_1\hat{x}_1 + \hat{p}_1\bar{x}_1 - \hat{p}_1\bar{x}_1 + \bar{p}_2\bar{x}_2 - \bar{p}_2\hat{x}_2 \\ &= \bar{x}_1\left(\bar{p}_1 - \hat{p}_1\right) + \hat{p}_1\left(\bar{x}_1 - \hat{x}_1\right) + \bar{p}_2\left(\bar{x}_2 - \hat{x}_2\right)\end{aligned}$$

Der Hilfssatz von Hotelling besagt nun, dass der Ausdruck $\hat{p}_1\left(\bar{x}_1 - \hat{x}_1\right) + \bar{p}_2\left(\bar{x}_2 - \hat{x}_2\right)$ ungefähr gleich Null ist, also der neue Preisvektor $(\hat{p}_1, \bar{p}_2)$ (fast) senkrecht auf dem Vektor der Mengenveränderung $(\bar{x}_1 - \hat{x}_1, \bar{x}_2 - \hat{x}_2)$ steht und somit

$$\bar{A} - \hat{A} \approx \bar{x}_1\left(\bar{p}_1 - \hat{p}_1\right) \ .$$

Dies gilt für endliche Differenzen nur näherungsweise, denn bekanntlich steht der Preisvektor auf der Tangente — der zugehörigen Isoausgabenlinie — senkrecht, während es sich bei $(\bar{x}_1 - \hat{x}_1,\, \bar{x}_2 - \hat{x}_2)$ um die Richtung der Sekante zwischen den beiden Berührpunkten der alten und neuen Isoausgabenlinien handelt.

Die Änderungsrate der Ausgabenfunktion in Bezug auf die Preisänderung $\Delta p_1 = \bar{p}_1 - \hat{p}_1$ lautet

$$\begin{aligned}\frac{\Delta A}{\Delta p_1} &= \bar{x}_1 + (\bar{p}_1 + \Delta p_1)\,\frac{\bar{x}_1 - \hat{x}_1}{\Delta p_1} + \bar{p}_2 \frac{\bar{x}_2 - \hat{x}_2}{\Delta p_1} \\ &= h_1\,(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) + (\bar{p}_1 + \Delta p_1)\,\frac{h_1(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) - h_1(\bar{u},\, \bar{p}_1 + \Delta p_1,\, \bar{p}_2)}{\Delta p_1} \\ &\quad + \bar{p}_2 \frac{h_2(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) - h_2(\bar{u},\, \bar{p}_1 + \Delta p_1,\, \bar{p}_2)}{\Delta p_1}\end{aligned}$$

Die Differenzenquotienten gehen für $\lim \bar{p}_1 - \hat{p}_1 \to 0$ in Differentialquotienten (sprich Ableitungen) über:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta p_1 \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta p_1} &= h_1\,(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) \\ &\quad + \lim_{\Delta p_1 \to 0} (\bar{p}_1 + \Delta p_1)\,\frac{h_1(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) - h_1(\bar{u},\, \bar{p}_1 + \Delta p_1,\, \bar{p}_2)}{\Delta p_1} \\ &\quad + \lim_{\Delta p_1 \to 0} \bar{p}_2 \frac{h_2(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) - h_2(\bar{u},\, \bar{p}_1 + \Delta p_1,\, \bar{p}_2)}{\Delta p_1} \\ \frac{\partial A}{\partial p_1} &= h_1 + \bar{p}_1 \frac{\partial h_1}{\partial p_1} + \bar{p}_2 \frac{\partial h_2}{\partial p_1}\end{aligned}$$

Im Grenzübergang $\lim \bar{p}_1 - \hat{p}_1 \to 0$ wird das Skalarprodukt

$$(\bar{p}_1,\, \bar{p}_2) \cdot \left(\frac{\partial h_2}{\partial p_1},\, \frac{\partial h_2}{\partial p_1} \right)$$

nun tatsächlich gleich Null, denn die beiden Isoausgabenlinien gehen ineinander über. Somit ist nicht nur approximativ, sondern exakt die Änderung der allgemeinen Ausgabenfunktion infolge einer partiellen Preisänderung bei Gut 1

$$\frac{\partial A}{\partial p_1}\,(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) = h_1\,(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2)\ .$$

Analog erhält man als Auswirkung einer partiellen Änderung des Preises von Gut 2 auf die allgemeine Ausgabenfunktion an der Stelle $(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2)$

$$\frac{\partial A}{\partial p_2}\,(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) = h_2\,(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2)\ .$$

Da die Wahl der unabhängigen Variablen $\bar{u}$, $\bar{p}_1$ und $\bar{p}_2$ beliebig ist, gilt diese Beziehung nicht nur an der genannten Stelle, sondern für die allgemeine Ausgabenfunktion insgesamt:

$$\frac{\partial A}{\partial p_1} = h_1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial A}{\partial p_2} = h_2$$

Die wesentliche Aussage des Hilfssatzes von Hotelling besteht also darin, dass die indirekte Auswirkung einer Preisänderung auf die minimalen Ausgaben vernachlässigbar ist.

4.8.3 Slutsky-Gleichung mit Änderungsraten

Der Substitutionseffekt $c_1 - a_1$ ist nun mittels Änderungsraten zu formulieren.

$$c_1 - a_1 = h_1\left(\bar{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right) - h_1\left(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right) \approx \frac{\partial h_1\left(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right)}{\partial p_1} \Delta p_1$$

Er wird meist auch als Differenzenquotient (oder als Differentialquotient)

$$\left.\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1}\right|_{u=\text{konstant}} = \frac{\partial h_1\left(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right)}{\partial p_1}$$

angeschrieben.

Der Einkommenseffekt $b_1 - c_1$ kann ebenfalls durch die Funktionswerte der kompensierten Nachfragekurve, sowie durch die allgemeinen Nachfragefunktionen ausgedrückt werden als

$$\begin{aligned} b_1 - c_1 &= h_1\left(\hat{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right) - h_1\left(\bar{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right) \\ &= g_1\left(A\left(\hat{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right),\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right) - g_1\left(A\left(\bar{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right),\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right) \\ &\approx \frac{\partial g_1\left(\bar{y},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right)}{\partial y}\left[A\left(\hat{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right) - A\left(\bar{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right)\right] \end{aligned}$$

Ersetzen von $A\left(\hat{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right) = \bar{y}$ durch $A\left(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right) = \bar{y}$ ergibt

$$b_1 - c_1 \approx \frac{\partial g_1\left(\bar{y},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right)}{\partial y}\left[A\left(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right) - A\left(\bar{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right)\right]$$

Die Differenz der allgemeinen Ausgabenfunktionswerte wird durch den Hilfssatz von Hotelling approximiert als

$$\begin{aligned} A\left(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right) - A\left(\bar{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2\right) &= -\frac{A\left(\bar{u},\, \bar{p}_1 + \Delta p_1,\, \bar{p}_2\right) - A\left(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right)}{\Delta p_1} \Delta p_1 \\ &\approx -\frac{\partial A\left(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2\right)}{\partial p_1} \Delta p_1 = -\bar{x}_1 \Delta p_1 \end{aligned}$$

Insgesamt kann daher der Einkommenseffekt einer Preisänderung angeschrieben werden als

$$\left.\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1}\right|_{(p_1,\,p_2)=\text{konstant}} = -g_1\left(\bar{y},\,\bar{p}_1,\,\bar{p}_2\right)\frac{\partial g_1\left(\bar{y},\,\bar{p}_1,\,\bar{p}_2\right)}{\partial y}$$

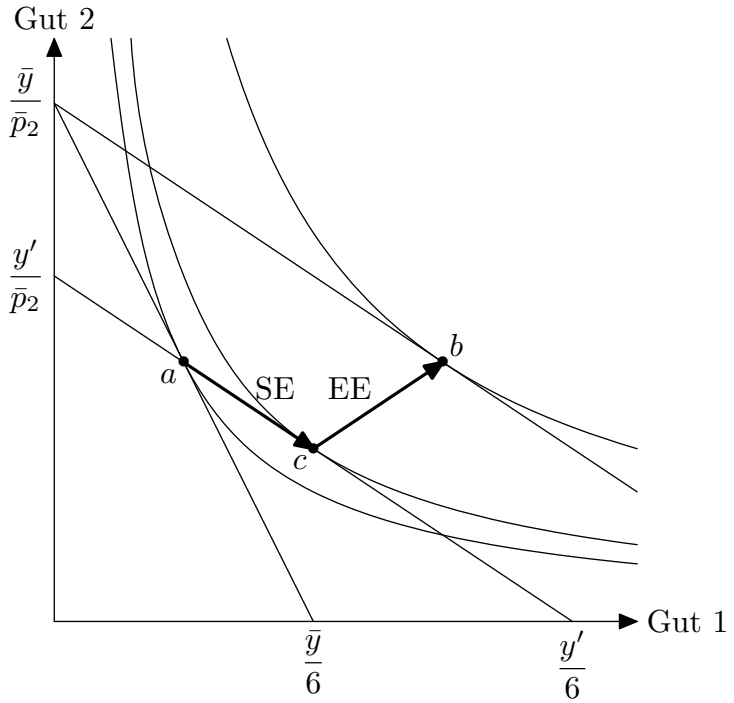
Zusammenfassen der beiden Effekte zum Gesamteffekt liefert dann die Slutsky-Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} &= \left.\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1}\right|_{u=\text{konstant}} + \left.\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1}\right|_{(p_1,\,p_2)=\text{konstant}} \\ &= \frac{\partial h_1\left(\bar{u},\,\bar{p}_1,\,\bar{p}_2\right)}{\partial p_1} - g_1\left(\bar{y},\,\bar{p}_1,\,\bar{p}_2\right)\frac{\partial g_1\left(\bar{y},\,\bar{p}_1,\,\bar{p}_2\right)}{\partial y}\end{aligned}$$

4.8.4 Slutsky-Zerlegung

Im Unterschied zu den beiden bereits bekannten Zerlegungen, die jeweils ein Rollen der Isoausgabenlinie entlang einer Indifferenzkurve unterstellen, wird

Abbildung 4.27: Slutsky-Zerlegung



bei der Slutsky-Zerlegung die Konstanz der Kaufkraft in Bezug auf das alte Güterbündel unterstellt. Dem Substitutionseffekt nach Slutsky liegt eine

Drehung der Budgetgerade um den alten optimalen Warenkorb a zugrunde und dem Einkommenseffekt wieder eine Parallelverschiebung der Budgetgeraden. Die Budgetgerade wird zunächst um das Güterbündel a gedreht. Auf der gedrehten Budgetgeraden ist dann nicht mehr a, sondern c der optimale Warenkorb. Der Einkommenseffekt besteht in der Parallelverschiebung der gedrehten Budgetgeraden, bis sie wieder den alten Achsenabschnitt $\bar{y}/\bar{p}_2$ erreicht. Wird ein ganz bestimmtes Güterbündel — beispielsweise a — fest vorgegeben und die Budgetgerade um dieses Güterbündel gedreht, dann ergeben sich bei den alternativen Richtungen der Budgetgeraden auch alternative Berührpunkte mit Indifferenzkurven. Die Verbindungslinie dieser Berührpunkte bildet einen besonderen Pfad im Güterraum des Konsumenten, der als Tauschkurve bezeichnet wird. Dieselbe Überlegung liegt auch dem Verhalten der Mengenanpassung zugrunde, die bereits im vorigen Kapitel (vgl. Abbildung 3.11, S. 91) dargestellt wurde.

4.8.5 Slutsky-Gleichung der Slutsky-Zerlegung

Bei der analytischen Betrachtung der Slutsky-Zerlegung ist nun der Substitutionseffekt anders als mittels der kompensierten Nachfragekurven abzugrenzen. Statt Nutzenkonstanz dient jetzt dazu das Kriterium der Konstanz der Kaufkraft.

Wiederum wird unterstellt, der Preis von Gut 1 sinkt um Δp_1 von $\bar{p}_1$ auf $\hat{p}_1$. Der alte optimale Warenkorb ist $a = (a_1, a_2)$ und der beim Preis $\hat{p}_1$ ist b. Die Konstanz der Kaufkraft bedeutet, dass das Güterbündel a sowohl mit dem Einkommen $\bar{y}$ als auch mit der berechneten Kaufkraft $\hat{y}$ für den Konsumenten erschwinglich ist:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \hat{p}_1 a_1 + \bar{p}_2 a_2 \\ \bar{y} &= \bar{p}_1 a_1 + \bar{p}_2 a_2 \\ \hat{y} - \bar{y} &= (\hat{p}_1 - \bar{p}_1)\, a_1 \\ \hat{y} &= \bar{y} + \Delta p_1 a_1 \end{aligned}$$

Der Substitutionseffekt gemäß Slutsky-Zerlegung beläuft sich auf $c_1 - a_1$, wobei c_1 die optimale Nachfragemenge des Konsumenten bei einer Kaufkraft $\hat{y}$ und den beiden Güterpreisen $\hat{p}_1$ und $\bar{p}_2$ ist

$$c_1 - a_1 = g_1\left(\hat{y}, \hat{p}_1, \bar{p}_2\right) - g_1\left(\bar{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2\right)$$

Dieser Ausdruck kann nicht mehr einfach (linear) durch einen Differentialquotienten[18] approximiert werden, da sich nicht nur eine Variable, sondern

[18] Er kann jedoch durch eine sogenannte Richtungsableitung linear angenähert werden.

zwei (y und p_1) gleichzeitig verändern. Wir werden den Ausdruck einfach umschreiben als

$$c_1 - a_1 = \left.\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1}\right|_{\text{Kaufkraft=konstant}} \Delta p_1$$

Der Einkommenseffekt wird durch die Differenz $b_1 - c_1$ angegeben. Er beträgt

$$\begin{aligned} b_1 - c_1 &= g_1(\bar{y}, \hat{p}_1, \bar{p}_2) - g_1(\hat{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) \\ &= -\frac{g_1(\bar{y} + \Delta p_1 a_1, \hat{p}_1, \bar{p}_2) - g_1(\bar{y}, \hat{p}_1, \bar{p}_2)}{\Delta p_1 a_1} \Delta p_1 a_1 \\ &\approx -a_1 \frac{\partial g_1(\bar{y}, \hat{p}_1, \bar{p}_2)}{\partial y} \Delta p_1 \end{aligned}$$

Zusammenfassen ergibt die Slutsky-Gleichung bei einer Slutsky-Zerlegung

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \left.\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1}\right|_{\text{Kaufkraft=konstant}} - g_1(\bar{y}, \bar{p}_1, \bar{p}_2) \frac{\partial g_1(\bar{y}, \hat{p}_1, \bar{p}_2)}{\partial y}$$

Zwar hat sich der Fachbegriff Slutsky-Gleichung eingebürgert, aber es sollte deutlich geworden sein, dass es sich jeweils um (lineare) Approximationen handelt, wobei die analytische Aufspaltung keineswegs trivial ist.

4.9 Elastizitäten der Nachfrage

Elastizitäten sind dimensionslose Maßzahlen für die Sensitivität von (ökonomischen) Größen. Die allgemeine Nachfrage eines Konsumenten nach einem Gut wird vom Preis dieses Gutes, den Preisen anderer Güter und dem Einkommen beeinflusst. Die relative Änderung der nachgefragten Menge des Gutes in Reaktion auf eine relative Änderung dieser Einflussfaktoren wird durch Elastizitäten der Nachfrage gemessen.

- Die *Einkommenselastizät* des Gutes gibt an, um wieviele Prozentpunkte sich die nachgefragte Menge des Gutes ändert, wenn sich das Einkommen des Konsumenten um einen Prozentpunkt ändert. Die Einkommenselastizität misst, wie empfindlich der Konsument auf eine einprozentige Einkommensänderung reagiert.

Auch Richtungsableitungen werden — wie erwartet — im kommenden Sommersemester in Mathe 2 behandelt.

- Die *direkte Preiselastiziät* der Nachfrage ist eine Maßzahl, die angibt, um wieviele Prozentpunkte sich die nachgefragte Menge eines Gutes ändert, wenn sich der Preis des Gutes um einen Prozentpunkt ändert. Die direkte Preiselastizität misst, wie empfindlich der Konsument auf eine einprozentige Änderung des Güterpreises reagiert.

- Die *Kreuzpreiselastizität* der Nachfrage schließlich gibt an, um wieviele Prozentpunkte sich die nachgefragte Menge des Gutes ändert, wenn sich der Preis (des) anderen Gutes um einen Prozentpunkt ändert. Die Kreuzpreiselastizität misst, wie empfindlich der Konsument auf einprozentige Änderungen bei anderen Güterpreisen reagiert.

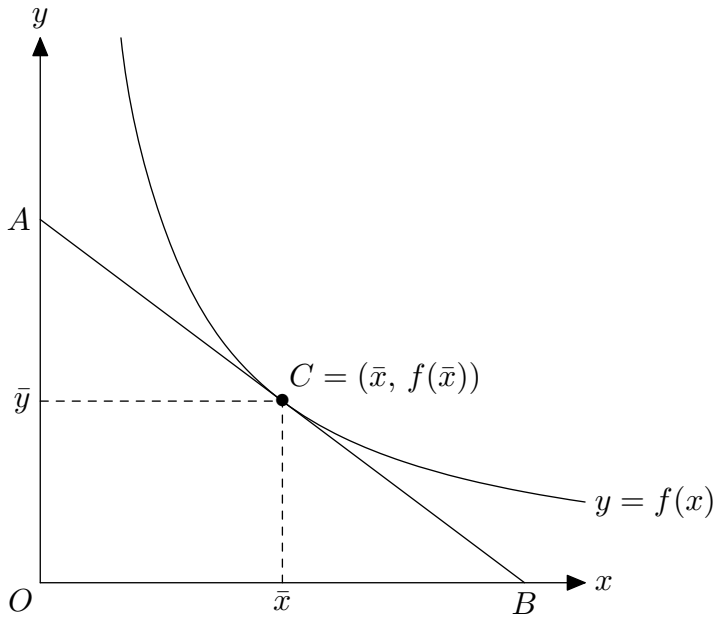
Mathematisch wird die Elastizität der Größe $y = f(x)$ in Bezug auf die Größe x definiert durch

$$\eta_{y,\,x} = \frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{x}{y} \approx \frac{\Delta y/\,y}{\Delta x/\,x}$$

4.9.1 Geometrische Darstellung

Gegeben ist eine Funktion $y = f(x)$ und gefragt wird nach der geometrischen Interpretation der Elastizität von y in Bezug auf x an der Stelle $f(\bar{x})$. Die

Abbildung 4.28: Elastizität als Verhältnis von Strecken



Ableitung von f an der Stelle $f(\bar{x})$ ist (bis auf das Vorzeichen) gleich dem Quotient der beiden Strecken $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$. Dasselbe Streckenverhältnis findet man aber auch zwischen $\overline{\bar{y}A}$ und $\overline{\bar{y}C}$, sowie zwischen $\overline{\bar{x}C}$ und $\overline{\bar{x}B}$. Folglich gilt

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x} = -\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = -\frac{\overline{\bar{y}A}}{\overline{\bar{y}C}} = -\frac{\overline{\bar{x}C}}{\overline{\bar{x}B}}$$

Die Elastizität ist gleich dieser Ableitung multipliziert mit dem Quotienten $\bar{x}/\bar{y}$, der ebenfalls als Streckenverhältnis geschrieben werden kann.

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \frac{\overline{O\bar{x}}}{\overline{\bar{x}C}} = \frac{\overline{\bar{y}C}}{\overline{O\bar{y}}}$$

Multiplikation beiden Quotienten ergibt dann — nach Kürzen

$$\eta_{y,x} = -\frac{\overline{\bar{y}A}}{\overline{\bar{y}C}}\,\frac{\overline{\bar{y}C}}{\overline{O\bar{y}}} = \frac{\overline{\bar{y}A}}{\overline{O\bar{y}}} \qquad \text{(Ordinate)}$$

$$\eta_{y,x} = -\frac{\overline{\bar{x}C}}{\overline{\bar{x}B}}\,\frac{\overline{O\bar{x}}}{\overline{\bar{x}C}} = \frac{\overline{O\bar{x}}}{\overline{\bar{x}B}} \qquad \text{(Abszisse)}$$

Wir erhalten also zwei geometrische Interpretationen, die jedoch einander sehr ähnlich sind:

1. Wähle einen Punkt auf der Kurve, z.B. $C = (\bar{x},\, f(\bar{x}))$.
2. Konstruiere die Tangente in diesem Punkt.
3. Die Elastizität in diesem Punkt ist dann das Teilungsverhältnis des Ordinaten- oder Abszissensbschnitts der Tangente mit der jeweiligen Koordinate des Punktes C.

Wenn die betrachtete Kurve monoton fällt, dann ist die Elastizität negativ, andernfalls ist die Elastizität positiv. Die geometrische und analytische Betrachtung bezieht sich auf eine sogenannte Punktelastizität. Es gibt auch noch die Bogenelastizität — dabei wird statt einer Tangente eine Sekante zugrunde gelegt, sowie die sogenannte Kurvenelastizität, die auf die Größenordnung der Elastizität in ausgewählten Bereichen einer Kurve abstellt. Man spricht von einem unelastischen Bereich, wenn der absolute Betrag der Elastizität sehr klein (nahe Null) ist und wenn der absolute Betrag sehr groß ist (beinahe Unendlich), spricht man von einem vollkommen elastischen Bereich. Besitzt eine Kurve in jedem Punkt dieselbe Elastizität, so bezeichnet man sie auch als isoelastisch. Beispiele für isoelastische Kurven mit negativer Elastizität sind Hyperbeln, ein Beispiel für eine isoelastische Kurve mit positiver Elastizität ist die CRRA-Nutzenfunktion (die im Rahmen der intertemporalen Wahl erwähnt wurde).

4.9.2 Güterklassifikation anhand von Elastizitäten

Wir hatten im Zusammenhang mit der allgemeinen Nachfragekurve bereits von normalen, superioren, inferioren, substitutiven und komplementären Gütern gesprochen. Diese Einteilung kann nun auch anhand der entsprechenden Elastizitäten vorgenommen werden. Dazu betrachten wir die allgemeine Gütern achfragekurve $g_1(y,\, p_1,\, p_2)$ des Gutes 1 und bilden die jeweiligen Elastizitäten.

4.9.2.1 Einkommenselastizität der Nachfrage

Die Einkommenselastizität der Nachfrage

$$\eta_{x_1,\,y} = \frac{\partial g_1}{\partial y}\,\frac{y}{x_1}$$

gibt Aufschluss darüber, um wieviele Prozentpunkte sich die nachgefragte Menge bei einer einprozentigen Einkommensvariation verändert. Man bezeichnet Gut 1 als superior, relativ inferior oder absolut inferior, je nachdem, ob seine Einkommenselastizität größer oder gleich Eins, positiv aber kleiner als Eins, oder negativ ist.

$$\eta_{x_1,\,y}\begin{cases}\geq 1 & \text{superior}\\ \in [0,\,1) & \text{relativ inferior}\\ < 0 & \text{absolut inferior}\end{cases}$$

Die (Punkt-) Einkommenselastizität der Nachfrage kann geometrisch anhand einer Engel-Kurve betrachtet werden.

4.9.2.2 Preiselastizität der Nachfrage

Die Preiselastizität der Nachfrage

$$\eta_{x_1,\,p_1} = \frac{\partial g_1}{\partial p_1}\,\frac{p_1}{x_1}$$

gibt an, um wieviele Prozentpunkte sich die nachgefragte Menge von Gut 1 verändert, wenn sich sein Preis um einen Prozentpunkt verändert. Die (direkte) Preiselastizität der Nachfrage ist bei normalen Gütern negativ, d.h. wenn sich p_1 um einen Prozentpunkt erhöht, dann sinkt die nachgefragte Menge um $\eta_{x_1,\,p_1}$ Prozentpunkte. Bei Giffen Gütern ist sie hingegen positiv. Bei unseren späteren Marktanalysen wird es hingegen nicht auf die individuelle Preiselastizität der Nachfrage, sondern auf die der Marktnachfragekurve ankommen.

4.9.2.3 Kreuzpreiselastizität der Nachfrage

Die Kreuzpreiselastizität der Nachfrage

$$\eta_{x_1,p_2} = \frac{\partial g_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1}$$

ist ein Maß dafür, wie stark die nachgefragte Menge des Gutes 1 auf eine einprozentige Veränderung beim Preis des anderen Gutes reagiert. Man bezeichnet Gut 1 als Substitut oder Komplement von Gut 2, je nachdem, ob die Kreuzpreiselastizität positiv oder negativ ist. Ist sie Null (oder nahe Null), dann sind die beiden Güter (nahezu) unverbunden.

$$\eta_{x_1,p_2}\begin{cases} > 0 & \text{Substitut von Gut 2} \\ = 0 & \text{unverbunden} \\ < 0 & \text{Komplement von Gut 2} \end{cases}$$

4.9.3 Beziehungen zwischen den Elastizitäten

Die allgemeinen Nachfragefunktionen besitzen die Eigenschaft der Ausschöpfung des Budgets. Diese Beziehung lässt sich auch mittels Elastizitäten formulieren. Wird das Budget $y = p_1x_1 + p_2x_2$ nach p_1 differenziert, entsteht

$$\begin{aligned} 0 &= g_1 + \frac{\partial g_1}{\partial p_1}p_1 + \frac{\partial g_2}{\partial p_1}p_2 \\ &= x_1\left(1 + \eta_{x_1,p_1}\right) + \frac{p_2x_2}{p_1}\eta_{x_2,p_1} \\ &= \frac{x_1p_1}{y}\left(1 + \eta_{x_1,p_1}\right) + \frac{x_2p_2}{y}\eta_{x_2,p_1} \\ &= \lambda\left(1 + \eta_{x_1,p_1}\right) + (1-\lambda)\eta_{x_2,p_1} \end{aligned}$$

Da die direkte Preiselastizität der Nachfrage normalerweise negativ ist, macht die Auflösung nach ihrem Negativen einen Sinn:

$$-\eta_{x_1,p_1} = 1 + \frac{1-\lambda}{\lambda}\,\eta_{x_2,p_1}$$

Man kann also im Zwei-Güter-Fall bei gegebenem Budgetanteil λ von Gut 1 und gegebener Kreuzpreiselastizität der Nachfrage des zweiten Gutes auf die direkte Preiselastizität des ersten Gutes schließen.

Wird das Budget nach y differenziert, dann ergibt sich eine Beziehung zwischen den Einkommenselastizitäten der beiden Güter, wobei wieder die

Budgetanteile als Gewichte fungieren.

$$\begin{aligned} 1 &= p_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} + p_2 \frac{\partial g_2}{\partial y} \\ &= \frac{p_1 x_1}{y} \eta_{x_1, y} + \frac{p_2 x_2}{y} \eta_{x_2, y} \\ &= \lambda \eta_{x_1, y} + (1 - \lambda) \eta_{x_2, y} \end{aligned}$$

Diese Beziehung zeigt, dass im Zwei-Güter-Fall nicht beide Güter absolut inferior sein können.

Eine Beziehung zwischen der direkten Preiselastizität und der Einkommenselastizität des gleichen Gutes kann durch die Slutsky-Gleichung aufgestellt werden. Wird die Slutsky-Gleichung

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\partial h_1}{\partial p_1} - x_1 \frac{\partial g_1}{\partial y}$$

mit p_1/x_1 multipliziert, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} \frac{p_1}{x_1} &= \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} - x_1 \frac{\partial g_1}{\partial y} \frac{y}{y} \frac{p_1}{x_1} \\ \eta_{x_1, p_1} &= \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} - \frac{p_1 x_1}{y} \eta_{x_1, y} \\ \eta_{x_1, p_1} + \lambda \eta_{x_1, y} &= \frac{\partial h_1}{\partial p_1} \frac{p_1}{x_1} \end{aligned}$$

Der Ausdruck auf der letzten linken Seite ist die Summe aus direkter Preiselastizität der Nachfrage und der mit dem Budgetanteil für das Gut gewichteten Einkommenselastizität der Nachfrage. Die letze rechte Seite ist ebenfalls eine Preiselastizität der Nachfrage, allerdings die der kompensierten Nachfrage. Für letztere wird üblicherweise kein eigenes Symbol eingeführt.

4.10 Konsumentenrente

Die individuelle Konsumentenrente ist ein Maß (in Geldeinheiten) für den Vorteil des Konsumenten dafür, dass er nur einen ganz bestimmten Preis für seine Nachfragemenge zu entrichten hat. Wird beispielsweise durch eine Verbrauchssteuer der Preis von Gut 1 von $\bar{p}_1$ auf $\hat{p}_1$ erhöht, dann wird der Konsument im Normalfall darauf mit einer von $\bar{x}_1$ auf $\hat{x}_1$ verminderten Nachfragemenge reagieren. Dem vergößerten Steueraufkommen beim Staat steht

ein verminderter Vorteil beim Konsumenten gegenüber. Dieser durch die Besteuerung verursachte Wohlfahrtsverlust[19] ΔCS wird annähernd durch den Ausdruck

$$\Delta CS \approx \frac{1}{2} (\bar{p}_1 - \hat{p}_1) (\bar{x}_1 + \hat{x}_1)$$

gemessen. In dieser Grundgleichung der Kosten-Nutzen-Analyse sind ausschließlich die empirisch beobachtbaren Größen des alten und neuen Preises sowie der alten und neuen Nachfragemenge enthalten. Ziel dieses Abschnitts ist es diese Grundgleichung schrittweise herzuleiten und zu interpretieren.

4.10.1 Konsumentenrente als Fläche

Wir betrachten das Szenario einer Preiserhöhung von $\bar{p}_1$ auf $\hat{p}_1$ mit der Nachfrageverminderung von $\bar{x}_1$ auf $\hat{x}_1$. Die Preiserhöhung hat auch Auswirkungen auf die Nachfrage des anderen Gutes, wir wollen (und können) uns jedoch zunächst auf die Veränderung der Nachfrage nach Gut 1 beschränken.

- Durch die Nachfrageverminderung tritt eine Nutzeneinbuße ein und wir fragen einerseits nach der Kompensation, die den Konsumenten in die Lage versetzen würde trotz des gestiegenen Preises sein *altes* Nutzenniveau $\bar{u}$ zu erreichen.
- Wir können aber auch umgekehrt fragen, wie groß die Ausgabenverminderung wäre, wenn beim *neuen* Nutzenniveau $\hat{u}$ die Preiserhöhung gerade wieder rückgängig gemacht würde.

Die erste Frage ist die nach der kompensierenden Einkommensvariation, die zweite Frage ist die nach der äquivalenten Einkommensvariation. Beide Fragen können durch den Hilfssatz von Hotelling beantwortet werden. Die Ausgabenänderung, die bei sehr kleinen (infinitesimalen) Preisänderungen des Gutes 1 zum gleichen Nutzen führt, wird gegeben durch

$$\frac{\partial A}{\partial p_1} = h_1$$

Dabei wird in der allgemeinen Ausgabenfunktion $A(\cdot)$ und in der kompensierten Nachfragefunktion $h_1(\cdot)$ der Preis von Gut 2 konstant auf dem Wert $\bar{p}_2$ gehalten, das Nutzenniveau ist bei der ersten Fragestellung beim alten Wert $\bar{u}$ und in der zweiten Fragenstellung auf dem neuen Wert $\hat{u}$. Durch Summation aller dieser Ausgabenänderungen, die zwischen altem und neuem Preis

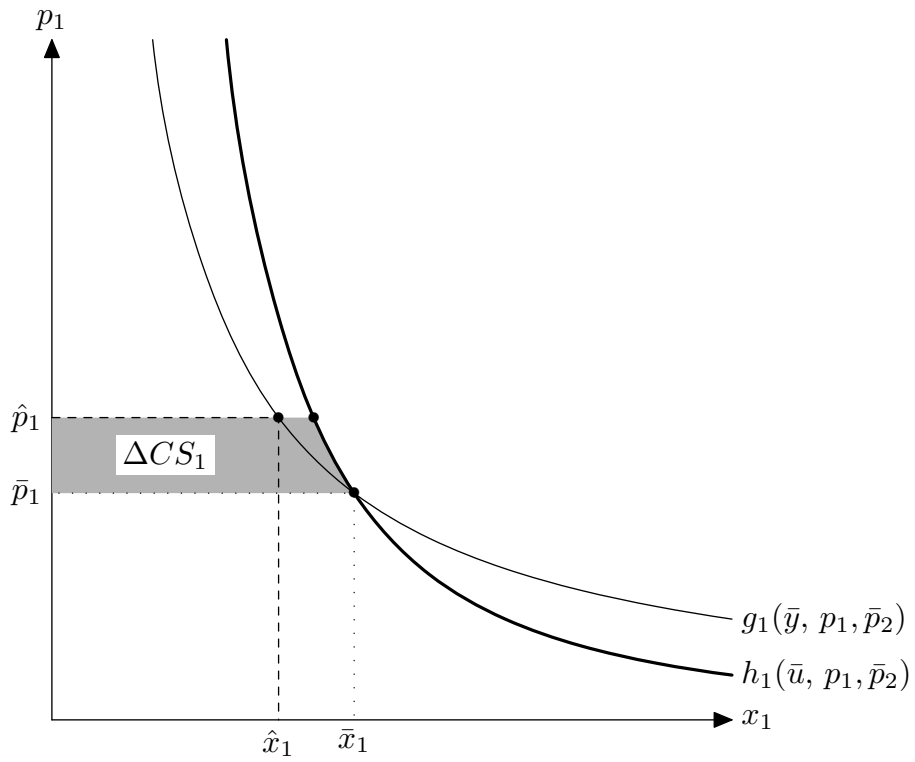
[19] Im Amerikanischen heißt die Konsumentenrente *consumer's surplus*, daher wird für die Konsumentenrente meist das Symbol CS verwendet.

zur Kompensation erforderlich sind, erhält man auf die erste Fragestellung den Geldbetrag

$$\begin{aligned}\Delta CS_1 &= -\int_{\bar{p}_1}^{\hat{p}_1} \frac{\partial A\,(\bar{u},\, p_1,\, \bar{p}_2)}{\partial p_1}\,\mathrm{d}\,p_1 = A\,(\bar{u},\, \bar{p}_1,\, \bar{p}_2) - A\,(\bar{u},\, \hat{p}_1,\, \bar{p}_2) \\ &= -\int_{\bar{p}_1}^{\hat{p}_1} h_1(\bar{u},\, p_1,\, \bar{p}_2)\,\mathrm{d}\,p_1\end{aligned}$$

als Differenz der allgemeinen Ausgabenfunktionswerte an den beiden betreffenden Stellen — indem die rechte Seite des Hilfssatzes von Hotelling benutzt wird — oder als Integral der kompensierten Nachfragekurve h_1 von Gut 1 — indem die linke Seite des Hilfssatzes von Hotelling benutzt wird. Letzteres,

Abbildung 4.29: Verminderung der Konsumentenrente, ΔCS_1



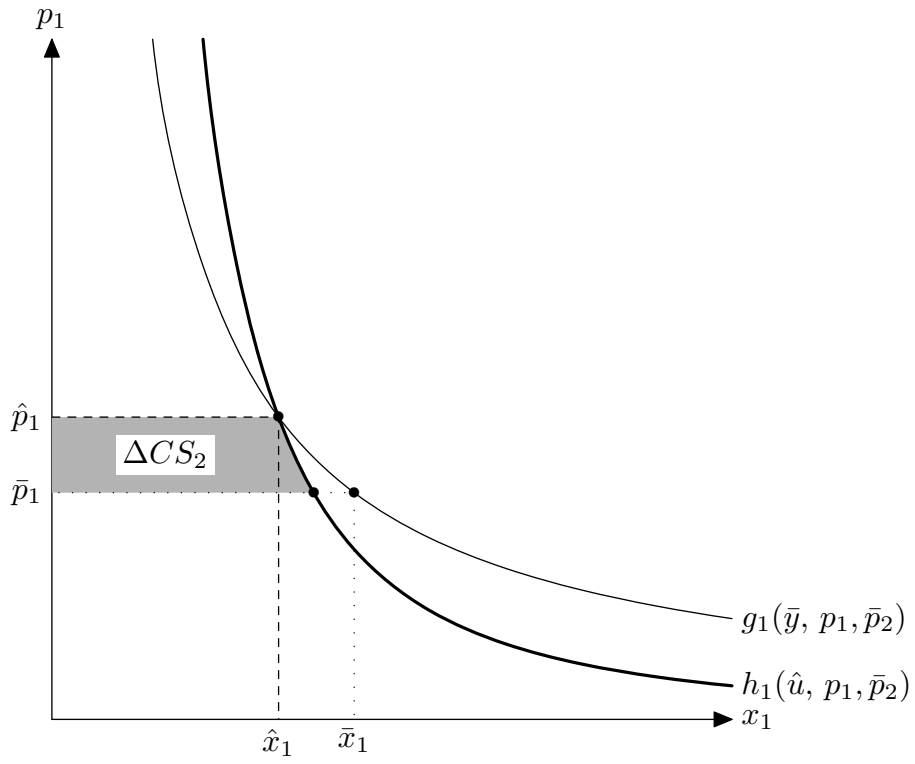
das Integral, ist nun das horizontale Flächenstück zwischen dem alten und neuen Preis und kompensierten Nachfragekurve von Gut 1 beim (alten) Nutzenniveau $\bar{u}$. Man erkennt, dass CS_1 den horizontalen Streifen zwischen den beiden Preisen und der direkten Nachfragekurve überschätzt.

Die zweite Maßzahl für die Veränderung der Konsumentenrente erhält man, indem man dieselbe Berechnung, für das neue Nutzenniveau $\hat{u}$ durchführt.

$$\Delta CS_2 = A\,(\hat{u},\,\hat{p}_1,\,\bar{p}_2) - A\,(\hat{u},\,\bar{p}_1,\,\bar{p}_2) = -\int_{\bar{p}_1}^{\hat{p}_1} h_1(\hat{u},\,p_1,\,\bar{p}_2)\,\mathrm{d}\,p_1$$

Auch diese ist ein horitontales Flächenstück zwischen den beiden Preisen der kompensierten Nachfragekurve zum *neuen* Nutzenniveau $\hat{u}$. Durch CS_2

Abbildung 4.30: Verminderung der Konsumentenrente, ΔCS_2



wird der horizontale Streifen zwischen den beiden Preisen und der direkten Nachfrage unterschätzt.

Da keine der beiden Maßzahlen der anderen vorzuziehen ist, bildet man einfach das arithmetische Mittel[20] und erklärt

$$\Delta CS = \frac{1}{2}\,(\Delta CS_1 + \Delta CS_2)$$

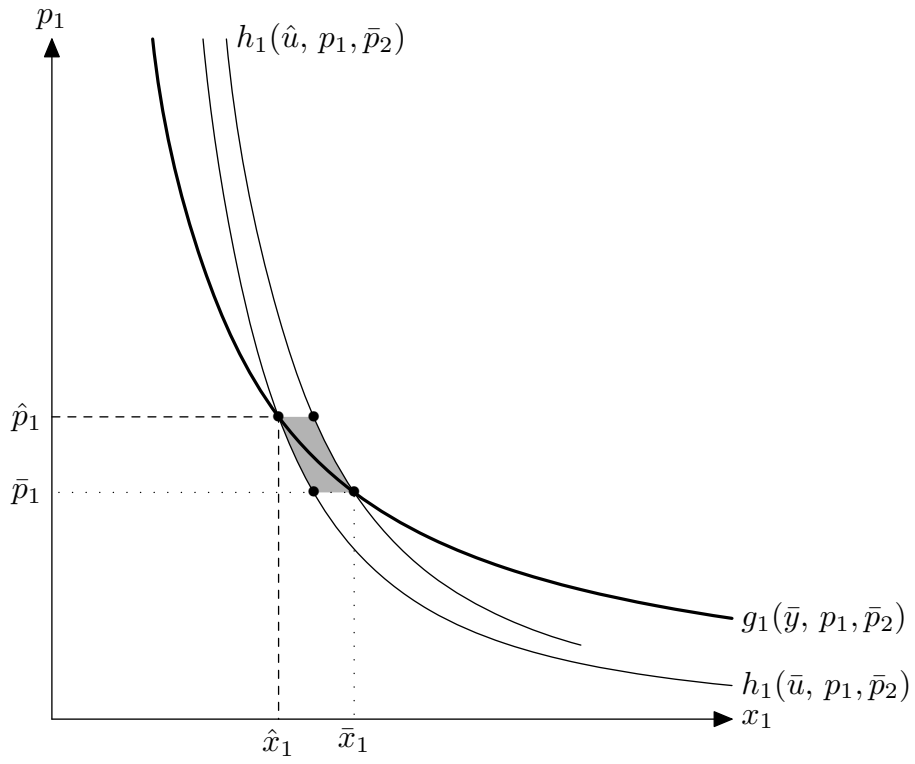
[20]Eine andere Begründung für die Konstruktion der Maßzahl liefert Hillinger (2001).

als die Veränderung der Konsumentenrente. Es handelt sich also um den Mittelwert aus kompensierter und äquivalenter Einkommensvariation.

4.10.2 Konsumentenrente und direkte Nachfragekurve

Betrachtet man die beiden Flächenstücke gemeinsam mit der direkten Nachfragekurve, dann erkennt man sofort, dass der horizontale Streifen zwischen den Preisen und der direkten Nachfragekurve als Approximation der Konsumentenrente dienen kann, denn ΔCS_1 überschätzt und ΔCS_2 unterschätzt

Abbildung 4.31: Der Unterschied zwischen ΔCS_1 und ΔCS_2



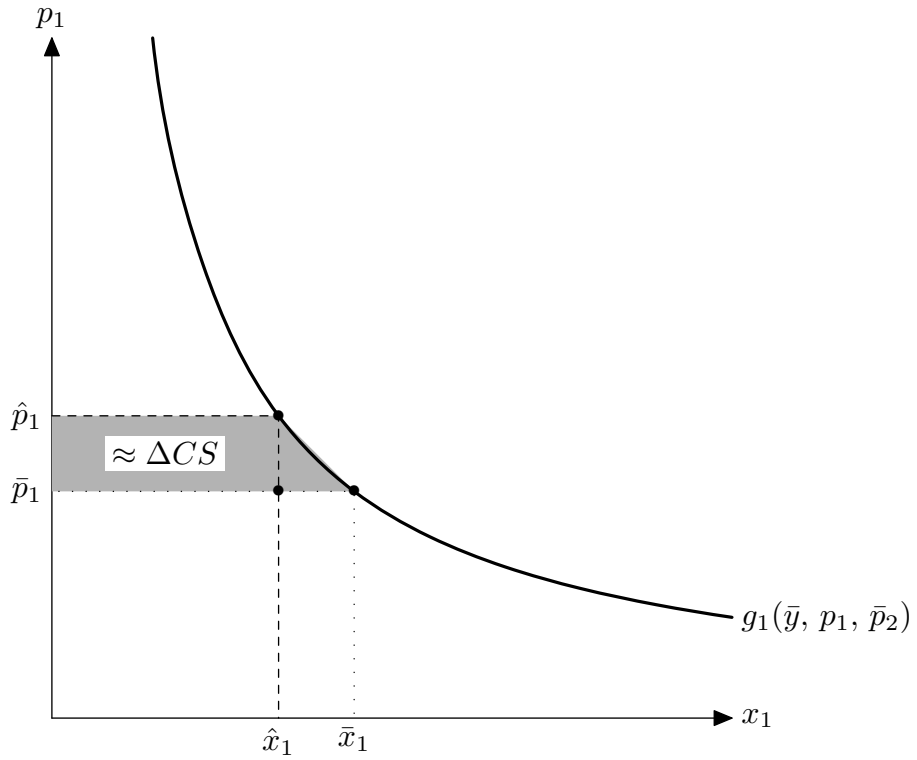
ihn. Letztlich ist nur die in Abbildung 4.31 dunkel unterlegte Fläche zu approximieren und zwar genau die Hälfte davon. Die Fläche ist beinahe ein Viereck, also liegt es nahe die Hälfte davon als eine Dreiecksfläche aufzufassen. Wir approximieren die Veränderung der Konsumentenrente als negative Summe aus der Rechtecks-Fläche $(\hat{p}_1 - \bar{p}_1)\,\hat{x}_1$ und der Dreickecks-Fläche

$$\frac{1}{2}\,(\bar{x}_1 - \hat{x}_1)\,(\hat{p}_1 - \bar{p}_1) \ .$$

Dadurch erhalten wir die Grundgleichung der Kosten-Nutzen-Analyse:

$$\begin{aligned}\Delta CS &\approx -\left(\hat{p}_1 - \bar{p}_1\right)\hat{x}_1 - \frac{1}{2}\left(\hat{p}_1 - \bar{p}_1\right)\left(\bar{x}_1 - \hat{x}_1\right) \\ &\approx \left(\bar{p}_1 - \hat{p}_1\right)\hat{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\bar{p}_1 - \hat{p}_1\right)\left(\bar{x}_1 - \hat{x}_1\right) \\ &\approx \left(\bar{p}_1 - \hat{p}_1\right)\hat{x}_1 - \frac{1}{2}\left(\bar{p}_1 - \hat{p}_1\right)\hat{x}_1 + \frac{1}{2}\left(\bar{p}_1 - \hat{p}_1\right)\bar{x}_1 \\ &\approx \frac{1}{2}\left(\bar{p}_1 - \hat{p}_1\right)\left(\hat{x}_1 + \bar{x}_1\right)\end{aligned}$$

Abbildung 4.32: Approximation von ΔCS



Mit dieser Approximation wird Zweierlei erreicht:

1. Der horizontale Streifen zwischen den beiden Preisen und der *direkten* Nachfragekurve wird als ungefähre Veränderung der Konsumentenrente rehabilitiert.

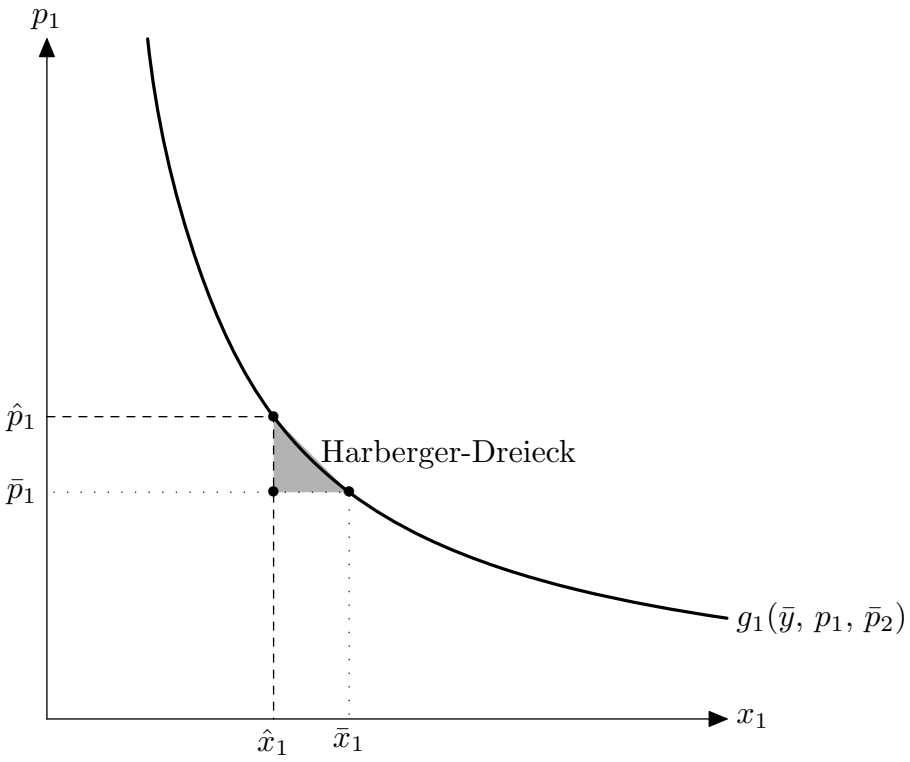
2. Die anwendungsbezogene Grundgleichung der Kosten-Nutzen-Analyse wird durch die Theorie der individuellen Nachfrage untermauert.

4.10.3 Harberger-Dreieck

Der Dreiecksfläche bei der Approximation, dem Harberger-Dreieck, kommt eine eigene wesentliche Bedeutung zu. Wir erläutern sie an dem Beispiel, das bereits am Anfang dieses Unterabschnitts angesprochen wurde.

Angenommen, der Staat führt eine Verbrauchssteuer ein, die den Preis von $\bar{p}_1$ auf $\hat{p}_1$ erhöht, dann ergibt sich als Verminderung der Konsumentenrente die in Abbildung 4.32 dunkel unterlegte Fläche. Da es sich um eine Verminderung handelt, ist sie als orientierte Fläche aufzufassen, also als eine negative Zahl. Der verminderten Konsumentenrente steht ein Steueraufkommen in Höhe von $(\hat{p}_1 - \bar{p}_1)\,\hat{x}_1$ beim Staat gegenüber. Durch die Steuer wird der Teil $(\hat{p}_1 - \bar{p}_1)\,\hat{x}_1$ der Konsumentenrente vom Verbraucher an den Staat umverteilt und ein Teil, das Harberger-Dreieck, wird vernichtet. Das

Abbildung 4.33: Zusatzlast einer Steuer



Harberger-Dreieck ist ein Maß für die sogenannte Zusatzlast einer Steuer. Wir werden im Rahmen des Mikro-Kurses noch weitere Beispiele für Harberger-Dreiecke vorstellen, beispielsweise im Zusammenhang mit der Marktform des

Monopols. Ganz allgemein kann mit Harberger-Dreiecken der gesellschaftliche Wohlfahrtsverlust gemessen werden.

4.10.4 Marginale Zahlungsbereitschaft

Die kompensierte Nachfragekurve $h_1(\bar{u}, p_1, \bar{p}_2)$ für Gut 1 ordnet jedem Preis p_1 des Gutes die Nachfragemenge x_1 zu, welche bei gegebenem Preis des anderen Gutes zu einem Nutzenniveau $\bar{u}$ *bei minimalen Konsumausgaben* führt. Sie ist bei streng konvexen Indifferenzkurven eine in p_1 streng monoton fallende Funktion. Folglich gibt es eine Umkehrfunktion $p_1 = h_1^{-1}(\bar{u}, x_1, \bar{p}_2)$, die jeder kompensierten Nachfragemenge einen Preis zuordnet. Diese Preise werden als *Vorbehaltspreise* oder als *Reservationspreise* bezeichnet und die Umkehrfunktion der kompensierten Nachfragekurve wird als Kurve der marginalen Zahlungsbereitschaft bezeichnet.

Um die geometrische Konstruktion und Interpretation zu vereinfachen, gehen wir davon aus, dass das Gut 2 kein Gut im gewöhnlichen Sinn ist, sondern eine bestimmte Geldsumme, die bei gegebenen Preisen aller Güter, außer dem für Gut 1, dem Konsumenten das Nutzenniveau $\bar{u}$ verschaffen kann, falls p_1 größer als $\tilde{p}_1$ ist. Das Gut 1 wird vom Konsumenten gar nicht gekauft, solange sein Preis größer als $\tilde{p}_1$ ist. Weiter soll er das Gut 1 nur in ganz bestimmten Mengeneinheiten kaufen können. Um die Interpretation zu vereinfachen, wird also vorübergehend auf die beliebige Teilbarkeit der Güter verzichtet.

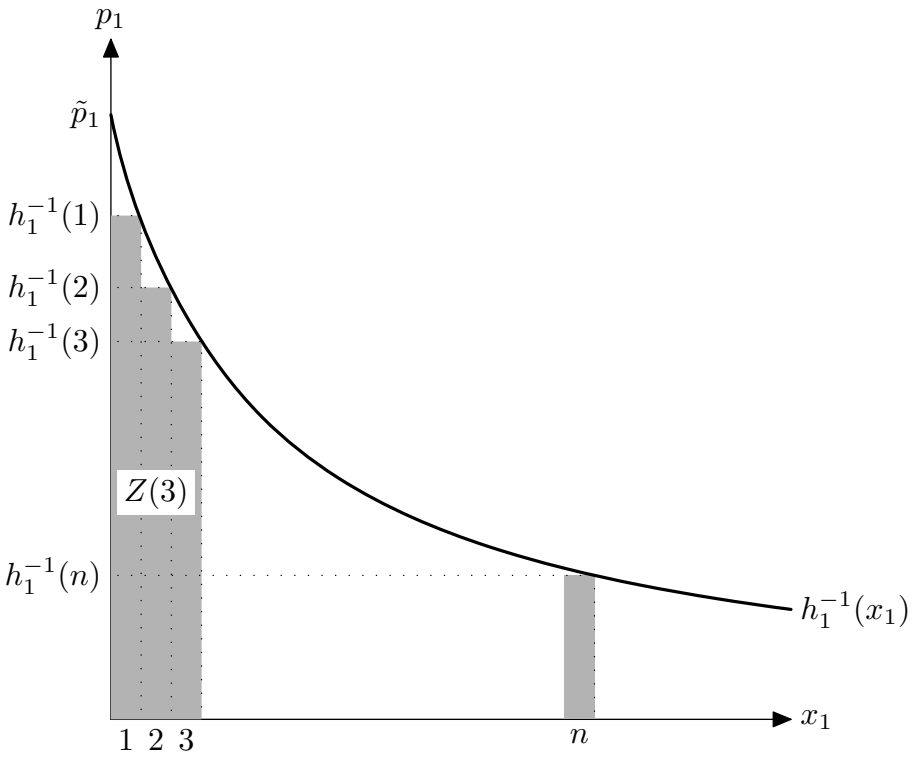
Wir fragen nun nach dem Geldbetrag, den der Konsument für eine erste Einheit von Gut 1 zu zahlen bereit ist. Die Antwort liefert uns die Inverse der kompensierten Nachfragekurve an der Stelle $x_1 = 1$, also der Vorbehaltspreis für die erste Gütereinheit $h_1^{-1}(1)$. Der Konsument ist bereit für seine erste Mengeneinheit den Geldbetrag $h_1^{-1}(1) \cdot 1$ zu zahlen. Nun wird das Gedankenexperiment mit der Frage nach der Zahlungsbereitschaft für die zweite Mengeneinheit fortgesetzt — unter der Voraussetzung, dass der Konsument bereits eine Einheit von Gut 1 gekauft hat. Man beachte den Unterschied — wir fragten eben *nicht* nach seiner Zahlungsbereitschaft für zwei Gütereinheiten auf einen Schlag, sondern schön der Reihe nach. Der Konsument wird sich nur dann zu einem Kauf einer zweiten Gütereinheit entscheiden, wenn der Preis stimmt, also auf $h_1^{-1}(2)$, seinem Vorbehaltspreis für die zweite Gütereinheit, lautet. Die marginale Zahlungsbereitschaft von der ersten zur zweiten Mengeneinheit überzugehen beträgt somit $h_1^{-1}(2) \cdot 1$. Nachdem der Konsument nunmehr bereits zwei Gütereinheiten von Gut 1 gekauft hat, wird er sich nur dann zu einer dritten entschließen, wenn der Preis auf $h_1^{-1}(3)$ lautet. Seine marginale Zahlungsbereitschaft von einer zweiten zu einer dritten Mengeneinheit überzugehen beträgt somit $h_1^{-1}(3) \cdot 1$.

Wenn der Konsument bereits $n-1$ Einheiten von Gut 1 gekauft hat, dann ist er nur dann bereit eine weitere, seine n-te, Gütereinheit zu erwerben, falls der Preis dafür $h_1^{-1}(n)$ beträgt. Für seine n-te Gütereinheit ist der Konsument also bereit $h_1^{-1}(n) \cdot 1$ Geldeinheiten zu zahlen. Die gesamte Zahlungsbereitschaft $Z(n)$ zum Kauf von n Gütereinheiten ist die Summe der marginalen Zahlungsbereitschaften für die Gütereinheiten von $i = 1$ bis $i = n$

$$Z(n) = \sum_{i=1}^{n} h_1^{-1}(i) \cdot 1$$

Die marginalen Zahlungsbereitschaften sind in Abbildung 4.34 als vertikale

Abbildung 4.34: Inverse der kompensierten Nachfragekurve



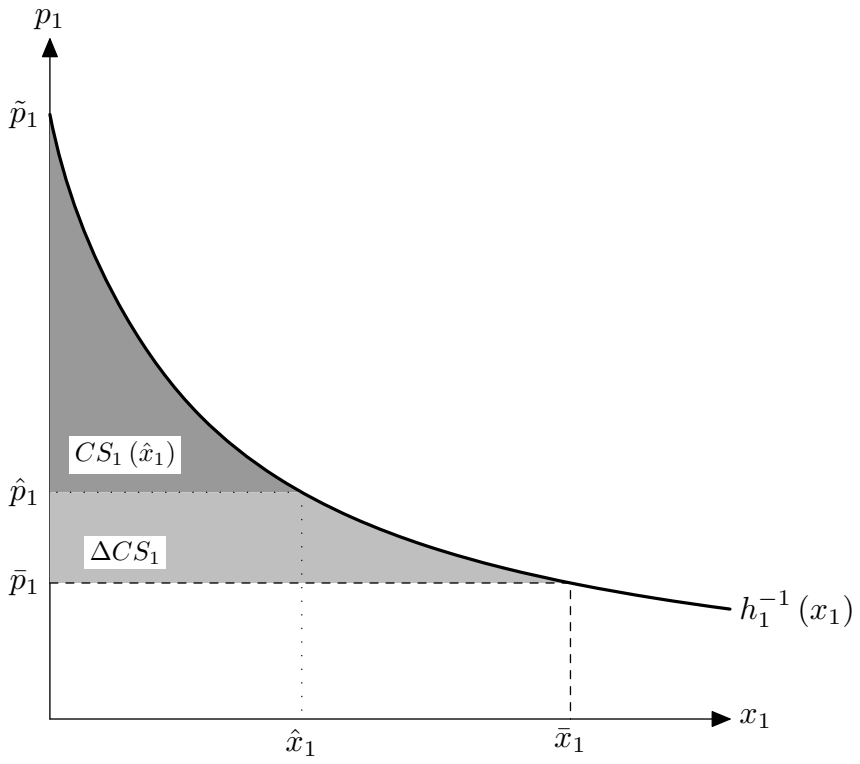
Balken über der x_1-Achse eingezeichnet. Werden die Gütereinheiten nicht in Einer-Schritten, sondern in infinitesimalen Schritten $\mathrm{d}\, x_1$ vollzogen, dann geht die Summe in ein Integral über und die gesamte Zahlungsbereitschaft zum Kauf von $\bar{x}_1$ Gütereinheiten ergibt sich als

$$Z\left(\bar{x}_1\right) = \int_0^{\bar{x}_1} h_1^{-1}\left(x_1\right) \mathrm{d}\, x_1$$

also als die Fläche unter der inversen kompensierten Nachfragekurve zwischen 0 und $\bar{x}_1$.

Wenn der Konsument beim Preis $\bar{p}_1$ die Menge $\bar{x}_1$ nachfragt, muss er dafür $\bar{p}_1\bar{x}_1$ ausgeben, er wäre aber bereit $Z(\bar{x}_1)$ dafür zu zahlen. Die Differenz ist die Konsumentenrente $CS_1(\bar{x}_1)$. Beim höheren Preis von $\hat{p}_1$ wird er nur eine geringere Menge $\hat{x}_1$ nachfragen, die Konsumentenrente $CS_1(\hat{x}_1)$ ist in diesem Fall die Differenz zwischen der gesamten Zahlungsbereitschaft $Z(\hat{x}_1)$ für die Menge $\hat{x}_1$ und dem Betrag $\hat{p}_1\hat{x}_1$, den er tatsächlich aufwenden

Abbildung 4.35: Konsumentenrenten und ihre Differenz



muss. Die gesamte Konsumentenrente ist somit jeweils die Fläche zwischen der Preishorizontalen und der Inversen der kompensierten Nachfragefunktion. Integriert wird hierbei über die Gütermenge (entlang der x_1-Achse) von Null bis zur betreffenden Nachfragemenge.

Diese Fläche entspricht beim Kauf von $\bar{x}_1$ Einheiten zum Preis von $\bar{p}_1$ dem Integral über die Differenz zwischen den Vorbehaltspreisen $h_1^{-1}(x_1)$ und

tatsächlichem Preis $\bar{p}_1$ summiert von der Null-ten bis $\bar{x}_1$-ten Gütereinheit

$$\begin{aligned} CS_1(\bar{x}_1) &= \int_0^{\bar{x}_1} \left[h_1^{-1}(x_1) - \bar{p}_1\right] \mathrm{d}\, x_1 \\ &= \int_0^{\bar{x}_1} h_1^{-1}(x_1)\, \mathrm{d}\, x_1 - \bar{p}_1\bar{x}_1 = Z(\bar{x}_1) - \bar{p}_1\bar{x}_1 \end{aligned}$$

Analog beläuft sich die Konsumentenrente CS_1 beim Kauf von insgesamt $\hat{x}_1$ Einheiten zum Preis von $\hat{p}_1$ auf

$$\begin{aligned} CS_1(\hat{x}_1) &= \int_0^{\hat{x}_1} \left[h_1^{-1}(x_1) - \hat{p}_1\right] \mathrm{d}\, x_1 \\ &= \int_0^{\hat{x}_1} h_1^{-1}(x_1)\, \mathrm{d}\, x_1 - \hat{p}_1\hat{x}_1 = Z(\hat{x}_1) - \hat{p}_1\hat{x}_1 \end{aligned}$$

Die Verminderung der Konsumentenrente, die durch eine Preiserhöhung von $\bar{p}_1$ auf $\hat{p}_1$ eintritt, also $CS_1(\bar{x}_1) - CS_1(\hat{x}_1)$, ist der horizontale Streifen zwischen den beiden Preisen und der Inversen der kompensierten Nachfragekurve — wiederum integriert über die x_1-Achse von Null bis zur Menge $\bar{x}_1$. Das ist jedoch dieselbe orientierte Fläche, die man auch durch Integration entlang der Preis-Achse von $\hat{p}_1$ nach $\bar{p}_1$ der kompensierten Nachfragefunktion erhält, wie man unmittelbar der Abbildung 4.35 entnehmen kann.

$$\begin{aligned} \Delta CS_1 &= CS_1(\bar{x}_1) - CS_1(\hat{x}_1) \\ &= \int_0^{\bar{x}_1} h_1^{-1}(x_1)\, \mathrm{d}\, x_1 - \bar{p}_1\bar{x}_1 - \int_0^{\hat{x}_1} h_1^{-1}(x_1)\, \mathrm{d}\, x_1 + \hat{p}_1\hat{x}_1 \\ &= \int_{\hat{x}_1}^{\bar{x}_1} h_1^{-1}(x_1)\, \mathrm{d}\, x_1 - \bar{p}_1\bar{x}_1 + \hat{p}_1\hat{x}_1 \end{aligned}$$

Wegen $x_1 = h_1(p_1)$ ergibt die Substitutionsregel der Integralrechnung:

$$\begin{aligned} &= \int_{h_1^{-1}(\hat{x}_1)}^{h_1^{-1}(\bar{x}_1)} h_1^{-1}(h_1(p_1)) \cdot h_1'(p_1)\, \mathrm{d}\, p_1 - \bar{p}_1\bar{x}_1 + \hat{p}_1\hat{x}_1 \\ &= \int_{\hat{p}_1}^{\bar{p}_1} p_1 \cdot h_1'(p_1)\, \mathrm{d}\, p_1 - \bar{p}_1\bar{x}_1 + \hat{p}_1\hat{x}_1 \\ &= (\hat{p}_1\hat{x}_1 - \bar{p}_1\bar{x}_1) - \int_{\bar{p}_1}^{\hat{p}_1} p_1 \cdot h_1'(p_1)\, \mathrm{d}\, p_1 \end{aligned}$$

Anwenden der Regel für partielle Integration ergibt:

$$\Delta CS_1 = \int_{\bar{p}_1}^{\hat{p}_1} h_1(\bar{u},\, p_1,\, \bar{p}_2)\, \mathrm{d}\, p_1$$

Das ist dasselbe Ergebnis, das bereits mit dem Hilfssatz von Hotelling hergeleitet wurde.

4.10.5 Bemerkungen zur Konsumentenrente

Die Betrachtungen zur Konsumentenrente sind gewissermaßen die Umkehrung der Slutsky-Gleichungen. Dem aufmerksamen Leser wird aufgefallen sein, dass bei der Konsumentenrente sehr viele Integrale und bei den Slutsky-Gleichungen sehr viele Differenzen- und Differentialquotienten vorkommen. Die Änderung der Konsumentenrente beschreibt die *Zusammenfassung* aller Vorteile des Konsumenten bei bestimmten Preisen, die Slutsky-Gleichungen beschreiben die *Zerlegung* der Unterschiede im Kaufverhalten, die aus bestimmten Preisen resultieren. Der Hilfssatz von Hotelling spielt bei beiden Themen eine wesentliche Rolle.

Die Grundgleichung der Kosten-Nutzen-Analyse basiert darauf, dass sich die Veränderung der Konsumentenrente sowohl durch die kompensierte Einkommensvariation ΔCS_1 als auch durch die äquivalente Einkommensvariation ΔCS_2 messen lässt. Somit liegt es nahe einen Durchschnitt beider Maßzahlen als Approximation zu benutzen. Die äquivalente Einkommensvariation geht vom Zustand (dem Güterbündel und Nutzenniveau) *nach* geändertem Preis aus und rechnet zurück, während die kompensierte Einkommensvariation vom alten Zustand ausgeht und vorausschätzt, was sich an Änderungen der Vorteile des Konsumenten beim Übergang zum neuen Preis einstellen wird. Beide Maßzahlen sind bestimmte Integrale über zwei kompensierten Nachfragefunktionen.

Der Begriff der Konsumentenrente kann sowohl über den Hilfssatz von Hotelling als auch über die marginale Zahlungsbereitschaft eingeführt werden. Der Weg über die marginale Zahlungsbereitschaft wird vielfach als der einfachere Zugang angesehen. Allerdings birgt er auch eine Schwäche, denn das bestimmte Integral muss bei der Null-ten Gütereinheit anfangen. Damit eine endliche Summe entsteht, muss die kompensierte Nachfragekurve und die Indifferenzkurve, entlang der die Isoausgabenlinie rollt, einen endlichen Ordinatenabschnitt besitzen. Dieser fest gewählte Ordinatenabschnitt erlaubt *ausschließlich* die Berechnung der kompensierten Einkommensvariation als Änderung der Konsumentenrente. Es gibt aber keinen Grund, den hypothetischen Zustand ohne Kauf des Gutes 1 als den Null-Punkt zur Berechnung der Konsumentenrente anzusehen, außer dass man ein kardinales Maß konstruieren möchte. In allen Anwendungen der Konsumentenrente kommt es jedoch auf die Veränderung von Zuständen an, daher kann sowohl der alte Zustand als auch der neue zur Normierung herangezogen werden. Man kann auch sofort nur von Veränderungen der Konsumentenrente ausgehen, denn

$CS_1(\bar{x}_1) = CS_1(\bar{x}_1) - 0 = CS_1(\bar{x}_1) - CS_1(0) = \Delta CS_1(0, \bar{x}_1)$. Die Verallgemeinerung dieses Ansatzes führt dann sofort auf die beiden Maßzahlen $\Delta CS_1(\hat{x}_1, \bar{x}_1)$ und $\Delta CS_2(\bar{x}_1, \hat{x}_1)$.

4.11 Bekundete Präferenzen

Die bisher dargestellte Theorie des individuellen Verhaltens eines Konsumenten war induktiv. Aus den Annahmen über die Präferenzordnung wurden über das ökonomische Maximalprinzip die allgemeinen Nachfragekurven hergeleitet und über das ökonomische Minimalprinzip die kompensierten Nachfragekurven. Beide Arten der Nachfragekurven wurden dann in ihrem Zusammenspiel bei den Slutsky-Gleichungen, den Elastizitäten und der Konsumentenrente weiter entfaltet. Hinter all diesen Betrachtungen standen die nicht jedesmal ausdrücklich erwähnten Voraussetzungen der fünf Präferenzaxiome und das ökonomische Vernunftsprinzip. In diesem Abschnitt wird nun deduktiv vorgegangen. Ausgehend vom beobachteten Kaufverhalten wird gefragt, ob diese Daten mit streng konvexen Indifferenzkurven und ökonomischem Rationalverhalten in Einklang stehen. Die Budgetbeschränkung ist sowohl beim induktiven wie auch dem deduktiven Ansatz gültig, denn sie ist keine Verhaltenshypothese — die widerlegbar sein könnte, sondern eine Tautologie — eine Definitionsgleichung, welche die Ausgabensumme benennt.

4.11.1 Prinzip der bekundeten Präferenzen

Das Prinzip der bekundeten Präferenzen lautet:

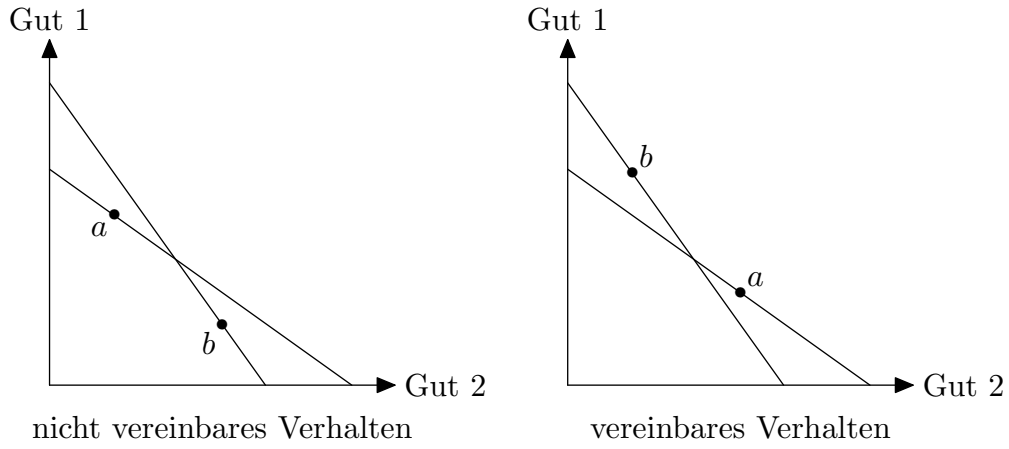
> Wird Güterbündel $a = (a_1, a_2)$ beim Preisvektor $p^a = (p_1^a, p_2^a)$ vom Konsumenten gekauft — oder gewählt — und das Güterbündel $b = (b_1, b_2)$ ist ebenfalls beim Preisvektor p^a für ihn erreichbar, also
>
> $$p_1^a a_1 + p_2^a a_2 \geq p_1^a b_1 + p_2^a b_2$$
>
> dann hat der Konsument offenbart, dass er das Güterbündel a gegenüber b präferiert $a \succ b$.

Falls jedoch das Güterbündel b beim Preisvektor p^a für den Konsumenten zu teuer ist, kann nichts über seine individuelle Bewertung der beiden Güterbündel ausgesagt werden.

4.11.2 Schwaches Axiom der bekundeten Präferenzen

Angenommen, es liegen zwei empirische Beobachtungen vor. Beim Preisvektor $p^a = (p_1^a, p_2^a)$ wird Güterbündel a gekauft und beim Preisvektor $p^b = (p_1^b, p_2^b)$ wird das Güterbündel b gekauft. Es können die beiden in der Abbildung 4.36 dargestellten Fälle eintreten.

Abbildung 4.36: Nicht vereinbares und vereinbares Verhalten



Im linken Teildiagramm ist Güterbündel b auch beim Preisvektor p^a erschwinglich, ebenso ist Güterbündel a beim Preisvektor p^b erschwinglich. In diesem Fall wird also eine Präferenz von a über b als auch umgekehrt eine Präferenz von b gegenüber a offenbart. Dieses Verhaltensmuster ist mit dem ökonomischen Rationalprinzip bei konvexen Indifferenzkurven *nicht* vereinbar. Wir zeigen diesen Sachverhalt indirekt. Angenommen, das Güterbündel a ist ein optimales, dann muss im Punkt a eine Indifferenzkurve die Budgetgerade tangieren. Ist die Indifferenzkurve aber streng konvex, dann muss sie links vom Schnittpunkt der beiden Budgetgeraden die Budgetgerade durch das Güterbündel b schneiden. Ist andererseits das Güterbündel b ebenfalls optimal, dann muss auch im Punkt b eine Indifferenzkurve die dortige Budgetgerade tangieren und rechts vom Schnittpunkt der beiden Budgetgeraden die Budgetgerade durch den Punkt a schneiden. Wenn wir also davon ausgehen, dass a optimal ist, muss b auf einer niedrigeren Indifferenzkurve liegen, und wenn wir zugleich unterstellen, dass auch b optimal ist, dann muss a auf einer niedrigeren Indifferenzkurve liegen. Dies widerspricht aber den Präferenz Axiomen.

Im rechten Teildiagramm von Abbildung 4.36 sind zwei Güterkäufe dargestellt, die mit den Präferenz Axiomen und dem Verhalten nach dem öko-

nomischen Prinzip vereinbar sind.

Man beachte, dass der Fall im linken Teildiagramm durchaus beobachtbar ist und falls er tatsächlich eintritt, dann hat sich der betreffende Konsument *nicht* so verhalten, wie es das Modell der individuellen Nachfrage voraussagt. Mithin können wir das Modell empirisch testen und gegebenenfalls verwerfen.

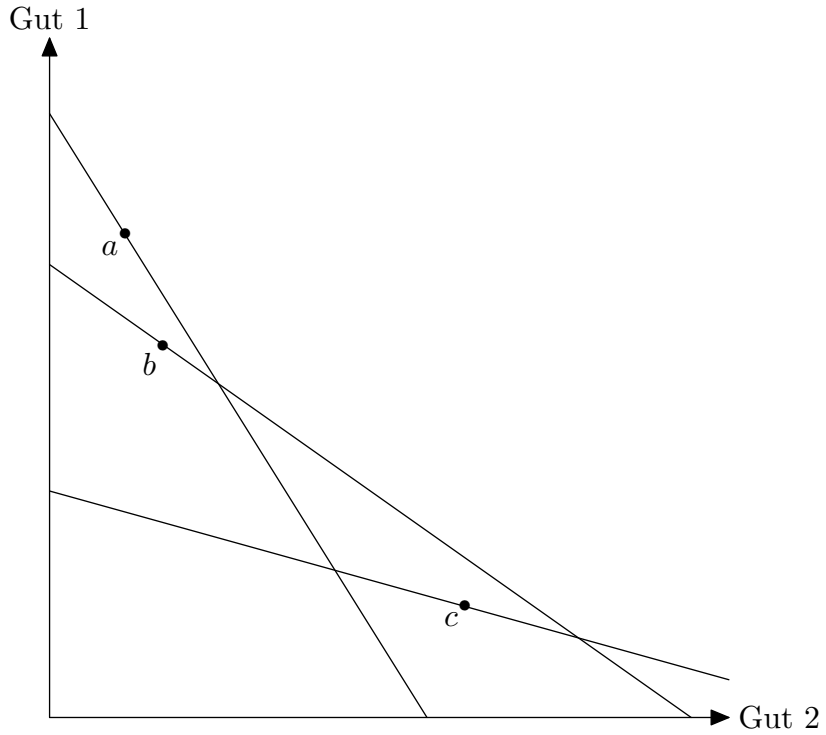
Das testbare Kriterium wird als *schwaches Axiom der bekundeten Präferenzen* bezeichnet. Es lautet:

> Wenn der Konsument gemäß dem Prinzip der bekundeten Präferenzen seine Präferenz des Güterbündels a gegenüber b offenbart hat, dann kann er nicht auch umgekehrt eine Präferenz von b über a bekunden.

4.11.3 Starkes Axiom der bekundeten Präferenzen

Wenn nun mehr als zwei empirische Beobachtungen vorliegen, dann lassen sich die damit offenbarten individuellen Wertschätzungen der Güterbündel

Abbildung 4.37: Starkes Axiom der bekundeten Präferenzen



weiter verfeinern, indem das starke oder verallgemeinerte Axiom der offenbarten Präferenzen benutzt wird. Beobachtet werden die Käufe der Güterbündel a, b und c bei den Preisvektoren p^a, p^b und p^c. Im direkten Vergleich wird gemäß des schwachen Axioms die Präferenz $a \succ b$ offenbart, denn das Güterbündel b liegt unterhalb der Budgetberaden durch den Punkt a. Weiter wird auch die Präferenz $b \succ c$ offenbart, denn auch das Güterbündel c liegt unterhalb der Budgetgeraden durch den Punkt b. Die Güterbündel a und c sind hingegen nicht direkt miteinander vergleichbar. Das starke Axiom der bekundeten Präferenz fordert nun die Transitivität, also $a \succ c$, obwohl das Güterbündel c beim Preisvektor p^a für den Konsumenten gar nicht erschwinglich ist.

Das verallgemeinerte Axiom der bekundeten Präferenzen lautet:

> Gegeben ist eine endliche Anzahl n von beobachteten Käufen x^1, x^2, $\ldots x^n$ eines Konsumenten. Diese Daten erfüllen das starke oder verallgemeinerte Axiom der bekundeten Präferenzen, wenn sich kein Zyklus $x^{n_1} \succ x^{n_2} \succ \cdots \succ x^{n_1}$ konstruieren lässt.

Nun kann man zeigen, dass die Erfüllung des verallgemeinerten Axioms der bekundeten Präferenzen notwendig und hinreichend dafür ist, dass der Konsument eine wohlgeartete[21] Nutzenfunktion unter Einhaltung seiner Budgetbeschränkung maximiert.

4.11.4 Durchführung eines Tests

Wir wollen anhand dreier beispielhafter Datensätze der Käufe eines Konsumenten prüfen, ob sie das verallgemeinerte Axiom der bekundeten Präferenzen erfüllen oder verletzen.

Datensatz	Preise		Mengen	
	p_1	p_2	x_1	x_2
1	3	4	2	2
2	4	3	1	4
3	3	3	2	3

Im ersten Schritt werden die tatsächlichen Konsumausgaben als die drei Skalarprodukte $p^i \cdot x^i$ für $i = 1, 2, 3$ berechnet und auf der Hauptdiagonalen einer neuen Tabelle angeordnet:

[21] Es ist eine Einschränkung der Aussage über einen Teilbereich des Güterraumes erforderlich. Die genannten Präferenz-Axiome beziehen sich bekanntlich auf den gesamten Güterraum. Wir haben es aber hier mit einer Aussage über eine endliche Stichprobe daraus zu tun. Die wohlgeartete Nutzenfunktion erfüllt nur *lokal* die Präferenz-Axiome.

Preise	Mengen		
	(2, 2)	(1, 4)	(2, 3)
(3, 4)	14		
(4, 3)		16	
(3, 3)			15

Im nächsten Schritt werden die Skalarprodukte $p^i \cdot x^j$ für i, $j = 1, 2, 3$ und $i \neq j$ berechnet. Nach dem Prinzip der bekundeten Präferenzen gilt bekanntlich $x^i \succ x^j$ falls $p^i \cdot x^i > p^i \cdot x^j$. Damit können wir dann zeilenweise die paarweisen Vergleiche anstellen, ob das schwache Axiom erfüllt wird oder nicht.

Preise	Mengen		
	(2, 2)	(1, 4)	(2, 3)
(3, 4)	14	19	18
(4, 3)	14	16	17
(3, 3)	12	15	15

Beginnen wir in der letzen (dritten) Zeile: $p^3 \cdot x^3 > p^3 \cdot x^1$ also gilt $x^3 \succ x^1$. Weiter gilt $p^3 \cdot x^3 = p^3 \cdot x^2$, d.h. der Konsument hätte auch das Güterbündel x^2 bei den Preisen p^3 kaufen können — er hat aber das Güterbündel x^3 erworben und somit seine Präferenz offenbart: $x^3 \succ x^2$. Aus der dritten Zeile erfahren wir also, dass der Konsument das Güterbündel x^3 sowohl x^2 als auch x^1 gegenüber bevorzugt.

Der zweiten (mittleren) Zeile entnehmen wir $p^2 \cdot x^2 > p^2 \cdot x^1$, also wird die Präferenz $x^2 \succ x^1$ offenbart. Weiter ist $p^2 \cdot x^2 < p^2 \cdot x^3$, folglich kann nichts über die Nutzeneinschätzung zwischen x^2 und x^3 ausgesagt werden. Insbesondere wird aber die Möglichkeit von $x^3 \succ x^2$ zugelassen, die bereits durch den Vergleich in der dritten Zeile etabliert wurde.

Aus der ersten Zeile können wir durch paarweise Vergleiche nichts Neues mehr entnehmen, da die beiden Güterbündel x^2 und x^3 beim Preisvektor p^1 für den Konsumenten nicht erreichbar sind — sie liegen oberhalb seiner Budgetrestriktion durch den Punkt x^1. Insgesamt tauchen also keine Verstöße gegen die beiden Axiome der bekundeten Präferenzen auf. Der Konsument hat sich so verhalten, *als ob* er seinen Nutzen — basierend auf den fünf Präferenz-Axiomen — unter Beachtung seiner jeweiligen Budgetbeschränkung maximiert hätte.

4.11.5 Falsifikation versus Modifikation

Die beiden Axiome der bekundeten Präferenzen bieten einen empirischen Test darüber, ob sich ein Konsument so verhält, wie es vom Modell der individuellen Nachfrage vorausgesagt wird. Im vorigen Unterabschnitt wurde

ein solcher Test beispielhaft durchgeführt, wobei der Konsument den Test bestanden hat. Wie ist aber im Falle eines Scheiterns zu verfahren? Auf diese Frage gibt es mehrere Antworten.

1. Menschen müssen sich nicht immer rational verhalten.
2. Zwischen den einzelnen Beobachtungen können sich die Präferenzen des Konsumenten geändert haben.
3. Die Begleitumstände der Käufe könnten einen starken Einfluss ausüben.

Jedenfalls wird durch ein Scheitern eines Testes nicht das gesamte Modell der individuellen Nachfrage eines Konsumenten zu Fall gebracht. Das pragmatische Vorgehen verlangt vielmehr, nach Ursachen zu fragen, die das Scheitern erklären können.

4.12 Marktnachfrage

Von der individuellen Nachfrage gelangt man zur Marktnachfrage, indem die individuellen Nachfragepläne aller Nachfrager in geeigneter Weise zusammengefasst werden. Mit einer Marktnachfragekurve ist immer die Zusammenfassung der direkten Nachfragekurven aller Konsumenten gemeint. Die Aggregation geschieht dabei über die nachgefragten Mengen bei einem ganz bestimmten Preis des betreffenden Gutes. Sind die direkten Nachfragekurven für Gut 1 $g_1^1\,(y^1,\, p_1,\, p_2)$, $g_1^2\,(y^2,\, p_1,\, p_2)$, $\ldots\, g_1^n\,(y^n,\, p_1,\, p_2)$ der Konsumenten 1, 2, $\ldots$, n gegeben, dann lautet die Marktnachfragekurve

$$N\,(p_1) = \sum_{i=1}^{n} x_1^i = \sum_{i=1}^{n} g_1^i\,\left(y^i,\, p_1,\, p_2\right)$$

Die Eigenschaften aller individuellen Nachfragekurven werden an das Aggregat vererbt. Hinzu kommt noch, dass die Lage und Gestalt der Marktnachfragekurve durch die Anzahl der Konsumenten beeinflusst wird. Diese Anzahl kann sich durch Aus- und Einwanderungen sowie durch das Wachsen oder Schrumpfen der ansässigen Bevölkerung verändern.

Anhang A

Bibliographie

Avinash K. Dixit und Barry J. Nalebuff. *Spieltheorie für Einsteiger*. Schäffer-Poeschel Verlag, Stuttgart, 1995. ISBN 3-7910-0913-3.

Friedrich Geigant, Franz Haslinger, Dieter Sobotka und Horst Westphal, Herausgeber. *Lexikon der Volkswirtschaft*. Verlag Moderne Industrie, Landsberg/Lech, 7. Auflage, 2000. ISBN 3-478-37057-4.

Horst Herberg. *Preistheorie. Eine Einführung in die Mikroökonomik*. Kohlhammer-Studienbücher: Wirtschaftswissenschaften. Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart, 1985. ISBN 3-17-005636-0.

Claude Hillinger. Money metric, consumer surplus und welfare measurement. *German Economic Review*, 2(2):177–193, 2001.

Herbert Marcuse. Über die philosophischen Grundlagen des wirtschaftswissenschaftlichen Arbeitsbegriffs. In *Kultur und Gesellschaft 2*, Nummer 135 in edition suhrkamp, Seiten 7–48. Suhrkamp Verlag, Frankfurt, 1965.

Karl Marx. *Grundrisse der Kritik der politischen Ökonomie*. Dietz Verlag, Berlin, 1953.

Karl Marx. *Zur Kritik der politischen Ökonomie*, Band 13 von *Marx Engels Werke*. Dietz Verlag, Berlin, 1961.

Karl Marx. *Das Kapital. Erster Band*, Band 23 von *Marx Engels Werke*. Dietz Verlag, Berlin, 1974.

Karl-Heinz Moritz. *Mikroökonomische Theorie des Haushalts*. Oldenbourg, München, 1993. ISBN 3-486-22590-1.

Jochen Schumann, Ulrich Meyer und Wolfgang Ströbele. *Grundzüge der mikroökonomischen Theorie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 7. Auflage, 1999. ISBN 3-540-66081-X.

Hal R. Varian. *Grundzüge der Mikroökonomik*. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 4. Auflage, 1999. ISBN 3-486-24505-8.