1.10 Algorithmen zur Nutzen- und Konsumtheorie

Diese Algorithmen sollen Sie befähigen, die schwierigeren Aufgabenteile eigenständig zu lösen. Wir haben uns bemüht, die einzelnen Rechenschritte so elementar wie möglich darzustellen. Mitunter stehen noch Hinweise in der rechten Spalte. **Arbeiten Sie mit diesen Algorithmen, indem Sie** jeden Schritt nachvollziehen. Rechnen Sie dann ähnliche Aufgaben nach diesem Schema und machen Sie sich weitere Notizen falls nötig.

1.10.1 Lagrangeansatz zur Ermittlung der Nachfragefunktion – Cobb-Douglas-Nutzenfunktion

Vorgang	**Erläuterungen/Notizen**
1. Die zu maximierende Nutzenfunktion $u(x_1,x_2)$ hinschreiben. Wir nehmen die Cobb-Douglas- Nutzenfunktion $U(x_1,x_2)=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$.	
2. Die Budgetbeschränkung $p_1x_1+p_2x_2=m$ aufstellen.	Eigentlich ist das eine Ungleichung, aber nach dem Gesetz von Walras wird das gesamte Einkommen verbraucht, so dass wir mit der Gleichung rechnen.
3. Die Lagrange-Funktion aufstellen: $L=u(x_1,x_2)-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-m)$ (1.73)	Achtung Vorzeichen: Setzen Sie vor λ immer das Minus.
4. Die partiellen Ableitungen von (1.73) nach x_1, x_2, λ ausrechnen und gleich Null setzen: $\frac{\partial L}{\partial x_1}\overset{!}{=}0$ (1.74) $\frac{\partial L}{\partial x_2}\overset{!}{=}0$ (1.75) $\frac{\partial L}{\partial \lambda}\overset{!}{=}0.$ (1.76)	Lösen Sie nach λ auf, dann ist das Umstellen einfacher, weil (1.74) und (1.75) leichter gleichgesetzt werden können.
Bedingungen (1.74) und (1.75) nach λ auflösen.	
5. Rechte Seiten der nach λ aufgelösten Bedingungen (1.74) und (1.75) gleichsetzen, um die Tangentialbedingung zu erhalten: $\lvert MRS_{21}\rvert=\frac{\frac{\partial u}{\partial x_1}}{\frac{\partial u}{\partial x_2}}=\frac{p_1}{p_2}$ (1.77)	Die Striche | bedeuten Betrag, (macht das Rechnen schneller.)
6. Diese Tangentialbedingung nach x_2 in Abhängigkeit von x_1 auflösen: Man erhält $x_2=f(x_1)$.	Damit erhält man die Gleichung der Preis-Konsum-Kurve.
7. Die nach x_2 aufgelöste Tangentialbedingung $x_2=f(x_1)$ in Gleichung (1.76) einsetzen und nach x_1 auflösen. Damit erhalten wir die allgemeine Nachfragefunktion nach Gut 1 in Abhängigkeit von den Güterpreisen und dem Einkommen.	
8. Die Nachfragefunktion nach Gut 1 in die nach x_2 aufgelöste Tangentialbedingung einsetzen. Damit erhalten wir die allgemeine Nachfragefunktion nach Gut 2 in Abhängigkeit von den Güterpreisen und dem Einkommen.	
9. Gegebene Werte der Güterpreise und des Einkommens in die Nachfragefunktionen einsetzen.	
10. Die ausgerechneten Werte der beiden Nachfragefunktionen ergeben den optimalen Konsumplan.	
11. Einsetzen der errechneten Werte für x_1 und x_2 in die Nutzenfunktion ergibt den optimalen Nutzen im Haushaltsoptimum.	

1.10.2 Lagrangeansatz zur Ermittlung der Nachfragefunktion bei additiver Nutzenfunktion

Vorgang

1. Maximierung unter Nebenbedingungen am Beispiel der Nutzenfunktion $u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$
2. Gegeben ist die Nutzenfunktion
$$u(x_1,x_2)=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\ .$$
3. Die Budgetbeschränkung lautet: $p_1x_1+p_2x_2=m$.
4. Lagrangefunktion:
$$L=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-m) \qquad (1.78)$$
5. Partielle Ableitungen von (1.78):
$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,5\cdot x_1^{-0,5}-\lambda\cdot p_1\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{0,5\cdot x_1^{-0,5}}{p_1} \qquad (1.79)$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=0,5\cdot x_2^{-0,5}-\lambda\cdot p_2\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{0,5\cdot x_2^{-0,5}}{p_2} \qquad (1.80)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=-(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2-m)\overset{!}{=}0 \quad\Rightarrow\quad m=p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2 \qquad (1.81)$$
6. Aus den ersten beiden Bedingungen folgt nach Eliminierung der Variable λ (Gleichsetzen von (1.79) und (1.80)) die Tangentialbedingung:
$$\frac{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(x_1,x_2)}{\partial x_2}}=\frac{0,5\cdot x_1^{-0,5}}{0,5\cdot x_2^{-0,5}}=\frac{p_1}{p_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{x_2}{x_1}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \qquad (1.82)$$
7. Setzt man diese Bedingung in (1.81) ein, erhält man:
$$m=p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2=p_1\cdot x_1+p_2\cdot\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\cdot x_1$$
$$m=p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2=p_1\cdot x_1+p_2\cdot\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2\cdot x_1$$
$$\Rightarrow\quad m=\left(p_1+\frac{p_1^2}{p_2}\right)x_1=\frac{p_1p_2+p_1^2}{p_2}\cdot x_1$$
8. $$x_1^*=\frac{p_2\cdot m}{p_1\cdot p_2+p_1^2} \qquad (1.83)$$ Das ist die allgemeine Nachfragefunktion nach Gut 1 in Abhängigkeit von den Güterpreisen, dem Einkommen und den Präferenzen (welche nicht mehr direkt sichtbar sind).
9. Für Gut 2 folgt:
$$x_2^*=\frac{p_1\cdot m}{p_1\cdot p_2+p_2^2} \qquad (1.84)$$

Das ist die allgemeine Nachfragefunktion nach Gut 2 in Abhängigkeit von den Güterpreisen, dem Einkommen und den Präferenzen (welche nicht mehr direkt sichtbar sind).

10. Durch Einsetzen konkreter Werte erhält man diejenigen Gütermengen, die die Zielfunktion maximieren. Seien z.B. m = 1000, $p_1=1$ und $p_2=2$.
$$x_1^*=\frac{p_2\cdot m}{p_1\cdot p_2+p_1^2}=\frac{2\cdot 1000}{1\cdot 2+1^2}=\frac{2000}{3}$$
$$x_2^*=\frac{p_1\cdot m}{p_1\cdot p_2+p_2^2}=\frac{1\cdot 1000}{2\cdot 1+2^2}=\frac{1000}{6}=\frac{500}{3}$$

Erläuterungen/Notizen

Zum graphischen Verlauf: Setzen Sie U = 10 und dann für x_1 = 0,16; 0,25; 0,36;..., 1, 2, 3 ein und ermitteln Sie die x_2. Werte.

Vorzeichen!

Achten Sie auf das Vorzeichen vor λ und auf die Klammer!

Die Gleichung $x_2=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 x_1$ beschreibt den Verlauf der Preis-Konsum-Kurve!

Die Nachfragefunktion sieht hier anders aus als bei der Cobb-Douglas-Nutzenfunktion.

1.10.3 Haushaltsoptimum mit Tangentialbedingung errechnen

Vorgang

1. Partielle Ableitungen der Nutzenfunktion nach x_1 und x_2 bilden.
2. Ableitungen in Formel für MRS einsetzen und auflösen.

Erläuterungen/Notizen

Dieser Weg ist einfacher und schneller als die Lagrangemethode